NoiStudiamo

APPUNTI

Fisica

Meccanica, dinamica, energia, urti e gravitazione, termodinamica, onde e cenni di meccanica quantistica

A CURA DI

Paolo Volpini

Novembre 2026

INDICE

Indice degli argomenti

Gli argomenti principali degli appunti e la pagina in cui iniziano.

1. Relazioni matematiche tra grandezze fisiche, cinematica 4
2. Moti 10
3. Moti bidimensionali 14
4. Dinamica del punto materiale 20
5. Forza elastica, forze di attrito 30
6. Lavoro della forza peso 38
7. Applicazioni della conservazione dell’energia meccanica 48
8. Urti 56
9. Legge di gravitazione universale 64
10. Introduzione alla termodinamica 68
11. Calore 76
12. Principi della termodinamica 82
13. Entropia 92
14. Onde 98
15. Cenni di meccanica quantistica 104
16. Meccanica ondulatoria di Schrodinger 110

Fisica

Paolo Volpini

01 - Relazioni matematiche tra grandezze fisiche, cinematica

In fisica ci sono molte grandezze misurabili. Non tutte queste grandezze sono fondamentali. Possiamo definire in maniera univoca alcune di queste grandezze: tali grandezze sono quelle fondamentali.
In meccanica ci servono tre grandezze fondamentali:

- **lunghezza**;
- **massa**;
- **tempo**.

Le altre grandezze le deriviamo da queste. Ad ogni grandezza inoltre associamo un'**unità di misura**:

- per la massa utilizziamo il **chilogrammo** (kg);
- per la lunghezza utilizziamo il **metro** (m);
- per il tempo utilizziamo il **secondo** (s).

Tale sistema prende il nome di **sistema KMS**.

Massa

Per la massa si utilizza il chilogrammo, definito come:

$$1\ kg = 4.595 \cdot 10^7\ m_p m_p = \sqrt{\frac{h \cdot c}{G}}$$

m_p è la massa del Planck. Tale massa è indipendente dagli strumenti di misurazione utilizzati, nonché dalla località in cui è avvenuta tale misurazione.

Tempo

Il tempo è misurato in secondi, dove ogni secondo corrisponde alla durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio-133. L'atomo di Cesio ha infatti un tempo caratteristico legato alla sua natura.

Lunghezza

Il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $\frac{1}{c}$. Da notare che per definire il metro facciamo riferimento alla velocità della luce nel vuoto. Pertanto può sembrare strano che utilizziamo la velocità per definire il metro. Tale apparente paradosso è risolto in quanto nella fisica moderna la velocità della luce nel vuoto si prende come **esatta**: è una quantità ben definita e non misurabile, pertanto priva di errore.

Altre grandezze fondamentali

Utilizziamo anche altre due grandezze fondamentali:

- la **temperatura**, misurabile in Kelvin;
- la **quantità di materia**, misurabile in moli.

In natura esistono anche grandezze rappresentate con ordini diversi tra loro. Ad esempio, il numero di molecole è nell'ordine del **numero di Avogadro**.

Stime e ordini di grandezza

Molto spesso è utile fare approssimazioni per capire l'ordine di grandezza della quantità da calcolare.

Cinematica del punto materiale

Con **cinematica** si intende la branca della fisica che si occupa di descrivere il moto dei corpi senza interessarsi alle cause dei moti stessi. Si tratta di una descrizione geometrica del moto di un corpo. Si occupa in particolare di calcolare la **legge oraria**, ossia la legge che lega la posizione del corpo in movimento rispetto al tempo.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Non è sempre detto che un sistema fisico possa essere sempre trattato come un punto materiale. Il corpo può essere trattato come un punto in virtù del problema che cerchiamo di risolvere. Ad esempio, se consideriamo il moto della Terra intorno al Sole, ci basta semplicemente specificare la posizione del centro della terra rispetto al Sole. Se dovessimo studiare la collisione della Terra con un corpo celeste molto grande, in quel caso è necessario conoscere necessariamente la forma della Terra. Questo processo non può essere analizzato con il punto materiale.

Dato un punto materiale o un sistema fisico, dobbiamo specificare in maniera univoca quante coordinate sono necessarie per definire la posizione del sistema. Ad esempio, possiamo chiederci quante coordinate dobbiamo specificare per determinare la posizione di una penna nello spazio. Se ci interessa un punto (tipo la punta della penna), allora ci bastano tre coordinate, ossia quelle del punto nello spazio. Per la penna ci servono gli estremi (quindi 6 coordinate), in quanto la penna è un **corpo rigido**: conosciamo in maniera univoca la posizione della penna nello spazio in quanto il corpo non è soggetto a cambiamenti.
Tuttavia poiché abbiamo ipotizzato che la penna è un corpo rigido, la distanza tra i due estremi è **costante**. Pertanto ci servono 5 coordinate, in quanto la sesta è calcolabile con la formula della distanza.
Complicando il sistema i **gradi di libertà** o rimangono uguali o aumentano. Con grado di libertà intendiamo il numero di variabili indipendenti necessarie per determinare univocamente la posizione di un corpo nello spazio. In questo caso abbiamo 5 gradi di libertà, in quanto abbiamo un vincolo; allora avendo f vincoli possiamo dire che i gradi di libertà sono (nello spazio) $3n - f$. Adesso supponiamo di complicare il sistema, dicendo che la bic non è un segmento rigido ma che abbia tre dimensioni: questo è il caso se volessimo distinguere alcune angolazioni della penna. In questo caso allora abbiamo un altro grado di libertà, poiché abbiamo bisogno anche di conoscere l'angolo di rotazione del corpo nella sua posizione.

Consideriamo un altro problema. Abbiamo un punto nel piano x, y su una traiettoria circolare. Conoscendo il raggio della circonferenza e sapendo che ad esempio a $t = 0$ il punto si trova a $x = \frac{r}{2}$. Calcolare y è banale: basta sostituire x nell'equazione della circonferenza e risolvere per y. Il sistema ha un grado di libertà: abbiamo due coordinate, ma il vincolo del movimento nella circonferenza.

Vettori

Un vettore è un elemento di uno spazio vettoriale V. Molte grandezze fisiche sono descritte da vettori invece di numeri. Possiamo definire in maniera grezza un vettore in fisica come una grandezza specificata da tre caratteristiche:

- **modulo**, o **intensità**;

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

- **direzione**;
- **verso**.

L'esempio più semplice è lo **spostamento**, in quanto definiamo non solo la distanza dello spostamento (modulo), ma anche la direzione su cui è avvenuto lo spostamento e il verso dello spostamento sulla direzione.

I vettori sono soggetti a diversi tipi di operazioni. La più semplice è la **somma vettoriale**. La somma tra due vettori v_1, v_2 è definita come:

$$v_1 + v_2 = (v_{11} + v_{21}, v_{12} + v_{22}, ..., v_{1n} + v_{2n})$$

In fisica è anche nota la **regola del parallelogramma**. Dati i due vettori v_1, v_2, il vettore somma risultante viene rappresentato graficamente come la diagonale maggiore del parallelogramma che si costruisce rappresentando i vettori con stesso punto di origine e costruendo il parallelogramma tracciando i segmenti paralleli ai vettori.

Se stiamo calcolando la **differenza** tra i vettori, il vettore risultante è la diagonale minore del parallelogramma che si ottiene con la regola del parallelogramma.

La differenza tra i vettori permette il calcolo del **vettore spostamento**. Lo spostamento è definito come la differenza tra le posizioni al tempo t_2 e t_1. Ogni posizione infatti può essere rappresentata come un vettore.

Prodotto scalare

Un'altra operazione che definiamo è il **prodotto scalare** tra vettori:

$$v_1 \cdot v_2 = v_{11} \cdot v_{21} + v_{12} \cdot v_{22} + ... + v_{1n} \cdot v_{2n}$$

Una maniera più semplice per calcolare tale prodotto è:

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| \cdot |v_2| \cdot \cos\theta$$

dove θ è l'angolo che formano i vettori. Mostrare che le due formule sono identiche è facile e lo faremo nel caso di due dimensioni. Infatti la formula deriva dal teorema di Carnot:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Possiamo allora costruire un triangolo i cui lato sono $v_1, v_2, v_1 - v_2$. La lunghezza dei vettori è data dai loro moduli, e indicando con c il vettore differenza $v_1 - v_2$, si ottiene:

$$|v_1 - v_2|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2|v_1||v_2|\cos\alpha$$

Ricordando che il modulo in un vettore è:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}$$

Allora si ha:

$$|v_1 - v_2|^2 = (v_{11} - v_{21})^2 + (v_{12} - v_{22})^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2v_1v_2$$

Sostituendo e con opportune semplificazioni, si ottiene la tesi.

Velocità

Un qualunque tipo di moto può essere descritto in virtù dello spostamento, ma non sempre è sufficiente. A volte è necessario anche definire il tempo in cui è avvenuto tale spostamento. Utilizziamo allora la **velocità**:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La velocità si misura in $\frac{m}{s}$. Questa è la velocità media. Se riduciamo Δt infinitamente, otteniamo il limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{r}}{dt}$$

Questa quantità prende il nome di **velocità istantanea**. La velocità di un punto materiale è intesa esclusivamente come la velocità istantanea da ora in poi.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Accelerazione

La velocità può cambiare durante il tempo. Tale cambiamento è espresso dall'**accelerazione**:

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt}$$

Se la velocità di un moto è costante, il moto si dice **uniforme**.

Le derivate sono espresse in virtù della legge oraria $x(t)$ del moto analizzato.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

02 - Moti

Velocità e accelerazione sono due vettori. Pertanto la velocità ha componenti $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, mentre l'accelerazione $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Moto rettilineo uniforme

Il **moto rettilineo uniforme** è un moto con velocità costante. Non intendiamo in questo caso che solo il modulo è costante, ma anche direzione e verso. Calcoliamo la legge oraria del moto rettilineo uniforme. Per farlo è sufficiente ricorrere alla definizione di velocità.

Sapendo che $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, allora possiamo dire che $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Consideriamo allora un tempo t_0 e la posizione $\vec{r}(t_0) \equiv \vec{r}_0$, e calcoliamo il vettore $\vec{r}(t)$. Basta calcolare l'integrale:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, dt = \vec{v} \int_{t_0}^{t} dt = \vec{v}(t - t_0)$$

Per cui si ha che la legge oraria è data da:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$$

da cui deduciamo anche:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \Delta\vec{r} = \vec{v} \cdot (t - t_0) = \vec{v} \cdot \Delta t$$

Consideriamo un moto nel piano e supponiamo che il vettore $\vec{v}$ formi un angolo θ con l'asse x. Il vettore ha componenti pari a $\vec{v} = (\vec{v} \cdot \cos\theta, \vec{v} \cdot \sin\theta)$. La posizione x nel piano in funzione del tempo è data da:

$$ x(t) = x_0 + v_{0x}(t-t_0)\

y(t) = y_0 + v_{0y}(t-t_0) $$

Il moto rettilineo uniforme nel piano è allora combinazione di due moti uniformi rispettivamente sull'asse x e sull'asse y.

Moto uniformemente accelerato

Nel **moto uniformemente accelerato** si ha che $\vec{a}$ è costante. Anche in questo caso partiamo dalla definizione di $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \implies d\vec{v} = \vec{a}dt$$

Supponiamo di partire da una posizione iniziale $\vec{r}_0$ e con una velocità iniziale $\vec{v}_0$. Pertanto:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt = \vec{a}(t-t_0)$$

Per cui:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)$$

Per ottenere lo spostamento $\vec{r}(t)$, basta integrare nuovamente:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \implies \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)dt = = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0\, dt + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t-t_0)\, dt = \vec{v}_0(t-t_0) + \vec{a} \int_{t_0}^{t}$$

L'ultimo integrale può essere risolto facendo un cambio di variabile $y = t - t_0$. Calcoliamo la derivata di y rispetto a t in quanto stiamo operando un cambio di variabile:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(t-t_0)}{dt} = 1 \implies dy = dt$$

e risolvendo:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$\int_0^{t-t_0} y\,dy = \frac{1}{2}(t-t_0)^2$$

Da cui arriviamo a:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2$$

Forza di gravità, caduta libera

Se facciamo cadere un punto materiale, questo cade con un'accelerazione verso il basso il cui modulo è $9.8\ \frac{m}{s^2}$. Tale accelerazione è l'accelerazione di gravità e si indica con $\vec{g}$.

Consideriamo allora un punto materiale in un piano bidimensionale e supponiamo che $x_0 = y_0 = 0$. Supponiamo inoltre che tale punto si muova con velocità iniziale $\vec{v}_0 = (0, v_0)$. Calcoliamo la legge oraria.

L'accelerazione a cui è sottoposto il punto materiale è $\vec{a} = (0, -g)$. Avremo allora che:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 0$$

Mentre per y:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Possiamo usare la legge oraria per calcolare la quota massima. La quota massima viene raggiunta nel momento in cui la velocità raggiunge 0. Questo è possibile dal calcolo della velocità:

$$0 = v_0 - gt \implies t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

A questo punto poiché sappiamo il tempo possiamo sostituire nella legge oraria:

$$y(t_{max}) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Il risultato è coerente con l'esperienza: banalmente più lanciamo forte maggiore sarà l'altezza raggiunta.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Un altro risultato riguarda la velocità raggiunta nel momento in cui il corpo arriva a terra, che è banalmente $-v_0$. Intuitivamente si ha infatti che poiché l'accelerazione è costante, il tempo che impiega il punto per salire alla massima quota è lo stesso che impiega per scendere. Facendo i calcoli basta:

$$y(t) = 0 \iff t(v_0 - \frac{1}{2}gt) = 0 \iff t = 0 \vee t = \frac{2v_0}{g}$$

e sostituendo alla formula della velocità si ottiene $-v_0$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

03 - Moti bidimensionali

Moto parabolico

Consideriamo il moto di un punto materiale che inizialmente si trova all'origine degli assi $(0, 0)$. Supponiamo che questo punto materiale abbia una velocità iniziale $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$. Inoltre supponiamo che il moto avvenga sotto effetto della accelerazione di gravità g orientata verso il basso.
Osservando l'accelerazione, che ha una direzione parallela all'asse y, possiamo scomporre tale moto in due:

1. un moto lungo l'asse x rettilineo uniforme;
2. un moto lungo l'asse y uniformemente accelerato.

Le leggi orarie che otteniamo sono:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Per le velocità invece osserviamo:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y}t - gt \end{cases}$$

La velocità infatti è costante lungo l'asse x (ignorando chiaramente ogni forma di attrito) e decresce linearmente lungo l'asse y.
Sappiamo, inoltre, che la quota massima viene raggiunta al tempo $t = \frac{v_{0y}}{g}$. Tale tempo lo annotiamo con t_M.
Lungo l'asse delle x il punto materiale si muove di una distanza pari a x_M. Questa distanza prende il nome di **gittata**. Per capire quanto vale la gittata, basta considerare il momento in cui il punto materiale raggiunge altezza 0, che sappiamo essere $2 \cdot t_M$. Otteniamo dalla legge oraria che la gittata è:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$x_M = x(2 \cdot t_M) = \frac{2 \cdot v_{0x} \cdot v_{0y}}{g}$$

La formula può essere semplificata applicando la formula di bisezione del seno. Si osserva che:

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2 \cdot \theta$$

Da cui deriviamo che:

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin 2 \cdot \theta}{g}$$

Fissati g e v_0, l'unica variabile è θ, per cui si può studiare quando la gittata è massima in virtù dell'angolo θ. Si ha che $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Per cui la gittata è massima quando $2 \cdot \theta = 90° \iff \theta = 45°$.

Infine, al tempo finale si ha che il modulo della velocità è uguale a:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_{0x}^2 + (-v_{0y})^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_0^2$$

Chiaramente la velocità iniziale non è uguale a quella finale. Il vettore velocità $\vec{v}$ è diverso dal vettore velocità $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) \vec{v} = (v_{0x}, -v_{0y})$$

Per cui i moduli coincidono, ma i vettori no.

Problema del cacciatore

Consideriamo un proiettile lanciato con velocità $\vec{v}_0$ da posizione iniziale $(0, 0)$. Abbiamo ad altezza H una mela appesa ad un albero. Nell'istante $t = 0$ in cui il proiettile viene lanciato, la mela cade. Dobbiamo stabilire se il proiettile colpirà la mela o meno.

Il problema è piuttosto semplice. La mela è in caduta libera da un punto di altezza H. Supponendo una distanza d dal proiettile lungo l'asse x, le leggi orarie che descrivono il moto della mela sono le seguenti:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$\begin{cases} x(t) = d \\ y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Le leggi orarie per il proiettile invece sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

A questo punto per risolvere il problema basta capire se nello stesso momento t_c le coordinate dei due punti corrispondano. Per trovare tale tempo basta:

$$d = v_{0x}t_c \iff t_c = \frac{d}{v_{0x}}$$

Adesso calcoliamo $y(t_c)$ per entrambi i corpi. Per la mela:

$$y(t_c) = H - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_{0x}^2}$$

Per il proiettile:

$$y(t_c) = \frac{v_{0y}d}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_{0x}^2}$$

Ne deduciamo che affinché il proiettile si trovi nella stessa posizione della mela deve verificarsi:

$$H = \frac{v_{0y}d}{v_{0x}}$$

Osserviamo che $\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = v_0 \cdot \tan\theta$. Per cui basta che:

$$H = \tan\theta \cdot d$$

Approfondimento: la mela non cade

Se la mela non cade, possiamo capire di quanto il proiettile mancherebbe la mela analizzando la legge oraria.

Si ha che al tempo t_c di caduta della mela osserviamo:

$$y(t_c) = \tan\theta \cdot d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_{0x}^2}$$

Sappiamo che $H = \tan\theta \cdot d$. Per cui la mela viene mancata di una quantità il cui modulo è pari a $\frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_{0x}^2}$. Ne segue che la differenza è tanto più piccola quanto più è veloce il proiettile. Essendo inoltre che la mela è un oggetto tridimensionale, il proiettile potrebbe colpirla anche se non colpisse precisamente il punto materiale. Infine, in situazioni reali non si punta mai alla posizione precisa.

Moto circolare uniforme

Supponiamo di avere un punto materiale che si muove nella traiettoria di una circonferenza. Il punto si muove con velocità iniziale $\vec{v}_0$ il cui modulo non cambia. In questo caso non possiamo dire che la velocità è costante: non abbiamo alcuna informazione sulla costanza di direzione e verso. Ossia, si ha che:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) \neq 0$$

Pertanto $\vec{a} \neq 0$. Voglaimo allora calcolare tale accelerazione.

Poiché abbiamo una variazione di verso e direzione, possiamo affermare che i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ formano un angolo $\Delta\theta$. Quando $\Delta\theta$ è molto piccolo, possiamo approssimare la lunghezza del segmento $\Delta\vec{v}$ con la lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio v:

$$|\Delta\vec{v}| = v \cdot \Delta\theta$$

Vogliamo allora capire **quanto rapidamente il punto materiale forma un angolo** θ. Per fare ciò, introduciamo la **velocità angolare**:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Da cui:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = v \cdot \omega$$

L'accelerazione:

$$a = v \cdot \omega$$

Prende il nome di **accelerazione centripeta**, in quanto è orientata verso il centro della circonferenza.
Possiamo inoltre dedurre che:

$$v = R \cdot \omega$$

In quanto $\Delta\theta \cdot R$ ci dà la lunghezza dell'arco di circonferenza.
Esistono anche altri modi per calcolare l'accelerazione. Osserviamo banalmente che la variazione di angolo $\Delta\theta$ può essere scritta come lo spazio percorso fratto il raggio R della circonferenza. Si ottiene allora:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \cdot \frac{\Delta s}{R \cdot \Delta t} = v \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R} = \frac{v^2}{R}$$

Infine, dalla relazione $v = R \cdot \omega$, possiamo dedurre:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

04 - Dinamica del punto materiale

Abbiamo per ora approfondito la cinematica del punto materiale, dove ci siamo occupati di descrivere il moto del punto materiale indipendentemente dalla causa del moto stesso. L'unico moto in cui abbiamo provato ad analizzare la causa è stato il moto della caduta libera, ma non ci siamo realmente posti la domanda di quale fosse la causa degli altri moti.
La **dinamica** si occupa di studiare la relazione tra il moto e la causa del moto stesso. La dinamica, così come una qualunque branca della fisica, si basa su alcuni principi o postulati. Li assumeremo presi dall'esperienza.

Primo postulato

Il **principio zero**, noto anche come **principio di relatività**, **principio di covarianza**, afferma che non esiste alcun esperimento che ci permette di distinguere due sistemi che si muovono di moto rettilineo uniforme.
Consideriamo due sistemi di riferimento (noti anche come osservatori) $Oxy, O'x'y'$. Supponiamo che il sistema di riferimento O' si muova rispetto all'osservatore O con un vettore velocità $\vec{v}_{O'0}$ che sia costante. Se facciamo un esperimento nel sistema O e poi lo rifacciamo nelle stesse condizioni nel sistema O', i risultati dei due esperimenti saranno identici. Per cui non possiamo pertanto distinguere O da O'.
In termini rigorosi, **le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento che si spostano l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme**. Le leggi della fisica sono pertanto **coerenti**.

Forza

Ogni grandezza fisica è introdotta da come viene misurata. Questo modo di definire le grandezze prende il nome di **definizione operativa**. Definiamo una forza come una qualunque entità che causi l'accelerazione di un punto materiale. Questa è nota anche come **definizione dinamica** della forza.

Misurando le accelerazioni su un corpo possiamo allora misurare le forze che agiscono su esso. Definiamo allora un **punto materiale libero** come un punto su cui non agiscono forze. Va da sé che se un punto materiale è libero, allora si muove di moto rettilineo uniforme: se su un punto non agiscono forze, l'accelerazione è nulla. Se $\vec{a} = 0$, la velocità è costante, per cui il moto del corpo è rettilineo uniforme. Questa definizione comprende anche il caso in cui $\vec{v} = 0$.

Equazione di Newton

Introduciamo l'**equazione di Newton**:

$$\vec{F} = m_i \cdot \vec{a}$$

La costante m_i indica la **massa inerziale**. La massa inerziale è una costante di proporzionalità tra una forza applicata ad un punto materiale e l'accelerazione che subisce.

La somma tra due forze segue sempre le regole della somma tra vettori. Se su un punto materiale agiscono due forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, allora la forza risultante che agisce sul punto materiale è la somma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Se due forze sono tali che si annullano, la risultante è 0 e non si hanno accelerazioni. Pertanto un punto materiale è libero anche quando la forza risultante è nulla.

La massa inerziale prende tale nome dalle osservazioni che derivano dall'isolamento della variabile $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_i}$$

Una accelerazione piccola indica una maggiore permanenza nello stato di moto rettilineo uniforme. Pertanto maggiore è m_i maggiore è l'inerzia del corpo.

Poiché l'accelerazione è il vettore:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Pertanto:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Per cui la forza può essere scritta in virtù della posizione e dovremmo risolvere un'equazione differenziale che nella migliore delle ipotesi è del secondo ordine. Ci sono alcuni casi tuttavia in cui l'equazione può essere risolta facilmente.
Essendo un'equazione del secondo ordine, dobbiamo specificare alcune condizioni iniziali:

- $\vec{r}_0$;
- $\vec{v}_0$.

Assegnata una forza $\vec{F}$, allora possiamo calcolare la legge oraria. Supponiamo $\vec{F}$ sia costante e di componenti $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Per semplicità, assumeremo $F_y = F_z = 0$. Per cui $\vec{F} = (F, 0, 0)$, e possiamo dire che:

$$F_x = m_i \cdot a_x F_y = m_i \cdot a_y F_z = m_i \cdot a_z$$

Poiché $F_y = F_z = 0$, il moto lungo l'asse y e il moto lungo l'asse z sono rettilinei uniformi.
Poiché l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, possiamo scrivere:

$$F_x = m_i \cdot \frac{dv_x}{dt} \implies \frac{F_x}{m_i} dt = dv_x$$

Integrando ad ambo le parti, e assumendo che al tempo $t = 0$ si ha che $v_x = v_{x0}$, possiamo scrivere:

$$\int_0^t \frac{F_x}{m_i}\, dt = \int_{v_{0x}}^{v(t)} d\, v_x$$

Poiché la forza e la massa sono costanti:

$$\frac{F_x}{m_i} t = v_x(t) - v_{x0} \implies v_x(t) = v_0 + \frac{F_x}{m_i} t$$

Osserviamo allora che il moto uniformemente accelerato è causato da una forza costante.
Resta solamente da calcolare la legge oraria. Derivando la velocità:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_{x0} + \frac{F_x}{m_i} t$$

Moltiplicando per dt entrambi i membri e integrando:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t (v_{x0} + \frac{F_x}{m_i}t)\, dt$$

Si ottiene che:

$$x(t) - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_x}{m_i}t^2 \implies x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_x}{m_i}t^2$$

E osserviamo ancora una volta che questa legge oraria è quella del moto uniformemente accelerato.

Forza peso

Abbiamo visto che a causa della gravità un corpo cade con un'accelerazione $\vec{g}$. La forza che agisce su questo corpo è la **forza peso** e la indichiamo con $\vec{P}$:

$$\vec{P} = m_g \cdot \vec{g}$$

m_g è una costante tra la forza peso e l'accelerazione di gravità. Da notare come il pedice di m_g sia diverso dal pedice di m_i. In linea di principio la massa inerziale è diversa dalla **massa gravitazionale**. In principio non c'è alcun motivo per cui la massa inerziale, che misura l'inerzia di un sistema qualunque sia la forza applicata, sia uguale alla massa gravitazionale, che è una costante che determina il modulo della forza peso. In natura tuttavia per ogni corpo vale **sempre** l'uguaglianza:

$$m_i = m_g$$

L'uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale induce un altro principio che prende proprio il nome di questa uguaglianza. Indicheremo da ora in poi la massa come m.

Notiamo che:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g}$$

Pertanto possiamo giungere a due conclusioni:

- l'accelerazione del corpo in caduta è l'accelerazione di gravità;
- l'accelerazione che subisce un corpo in caduta libera è **indipendente** dalla natura del corpo.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Pendolo semplice

Sia dato un punto materiale di massa m legato ad un filo di lunghezza l. Il punto materiale subisce la forza peso $\vec{P}$. Sul filo agisce una forza nota come **reazione vincolare** $\vec{\tau}$. La reazione vincolare è la forza che impedisce alla pallina di cadere. Introduciamo un angolo θ formato tra una retta verticale e il filo. La zona a sinistra corrisponde ad un angolo $\theta > 0$, mentre la zona a destra corrisponde ad un angolo $\theta < 0$. Questo ci permette di sapere in che direzione cresce l'angolo θ, ossia spostandosi da destra a sinistra. Questo riferimento è necessario per l'orientamento delle forze.

Possiamo scomporre la forza che agisce sul punto $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ sugli assi x e y. Questo conduce ad una scomposizione complicata. Scomponiamo allora la forza che agisce sulla pallina su un sistema di assi tale che l'asse verticale corrisponde alla direzione di $\vec{\tau}$, e l'asse orizzontale perpendicolare all'asse precedente. Pertanto un asse corrisponde al filo, l'altro alla perpendicolare di questo. Infine, come verso di quest'ultimo asse scegliamo il verso a sinistra, corrispondente alla direzione in cui cresce θ. La reazione vincolare pertanto **non influisce lungo tale asse** in quanto la componente è nulla. Indichiamo tale asse con $\hat{\theta}$. Pertanto dobbiamo scomporre la forza peso.

La componente lungo la direzione di $\vec{\tau}$ è:

$$P_{\tau} = -m \cdot g \cdot \cos\theta$$

Ed è completamente bilanciata da $\vec{\tau}$.
La componente lungo l'asse $\hat{\theta}$ è:

$$P_{\theta} = -m \cdot g \cdot \sin\theta$$

Consideriamo il moto del corpo, che per esperienza avviene lungo un arco di circonferenza. L'arco di circonferenza "spazzato" dal filo ha una lunghezza pari a $s = l \cdot \theta$. La forza:

$$P_{\theta} = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = m \cdot l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Otteniamo allora che:

$$m \cdot l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \sin\theta$$

Pertanto:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin\theta = 0$$

Studieremo questa equazione nel limite in cui θ tende a zero. Questo significa che il filo si distacca di poco dalla verticale. In questo limite possiamo utilizzare il risultato:

$$\sin\theta \approx \theta$$

Per $\theta \to 0$, otteniamo l'equazione:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0$$

Essendo un'equazione differenziale, la soluzione è una funzione. Più precisamente, la soluzione è la legge oraria $\theta(t)$.

Moto armonico

Prima di analizzare la legge oraria $\theta(t)$, è necessario conoscere il moto armonico.

Il **moto armonico** è la proiezione del moto di un corpo che si muove di moto circolare uniforme. Considerato un punto materiale P che si muove di moto circolare uniforme in senso antiorario, la sua posizione sull'asse x viene tracciata nel seguente modo:

$$x = A \cdot \cos\theta$$

dove A è il **diametro** della circonferenza. Sapendo che $\theta(t) = \omega \cdot t$, allora:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

Se la posizione iniziale del punto materiale è ϕ, dove ϕ prende il nome di **sfasamento** o **fase iniziale**, allora la legge oraria che esprime la posizione in virtù del tempo è:

$$x(t) = A \cdot (\omega t + \phi)$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

La velocità angolare ω del moto circolare uniforme prende il nome di **pulsazione**. Possiamo dimostrare che il moto del pendolo semplice segue la legge del moto armonico.

Moto del pendolo semplice

Abbiamo detto che dobbiamo risolvere l'equazione:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0$$

Essendo un'equazione omogenea di secondo ordine omogenea, la soluzione è la combinazione lineare di funzioni della famiglia:

$$\{e^{\alpha x} : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

dove la molteplicità di α identifica le funzioni (se r è la molteplicità di α e $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$y = e^{\alpha x}, y = x \cdot e^{\alpha x} ... y = x^{r-1} \cdot e^{\alpha x}$$

Mentre se $\alpha \in \mathbb{C}$, allora $\alpha = a + ib$ e per ogni soluzione complessa si ottengono due funzioni:

$$y = e^{ax} \cos bx y = e^{ax} \sin bx$$

L'equazione differenziale allora è facilmente risolvibile:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \iff \alpha^2 + \frac{g}{l} = 0 \iff \alpha = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Si ottengono allora le soluzioni:

$$y = \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t y = \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$k_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + k_2 \cdot \sin \frac{g}{l} t$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Vogliamo allora dimostrare che per opportuni valori di k_1, k_2 si ottiene:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Allora basta porre $k_1 = A\cos\phi$ e $k_2 = -A\sin\phi$. Si ottiene:

$$A\cos\phi \cdot \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t - A\sin\phi \cdot \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Dall'identità:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Otteniamo che la formula precedente è pari a:

$$A \cdot \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)$$

Possiamo allora dedurre che $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.
Dall'esperienza notiamo inoltre che partendo da un angolo θ oscilliamo fino ad un angolo $-\theta$ ignorando le resistenze. Pertanto:

$$\theta(0) = A \cdot \cos\phi$$

Considerando la derivata prima della legge:

$$\frac{d\theta}{dt} = -A\omega\sin(\phi)$$

Ma al momento iniziale la velocità angolare è nulla, per cui:

$$-A\omega\sin(\phi) = 0 \iff \sin\phi = 0 \iff \phi = 0$$

Ma se $\phi = 0$, allora $\cos\phi = 1$. Pertanto:

$$\theta(0) = A \cdot 1 = A$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Quindi A è la massima ampiezza θ_{MAX} dell'oscillazione. In questo caso allora la legge oraria diventa:

$$\theta(t) = \theta_{MAX} \cdot \cos(\omega t)$$

Il coseno è una funzione periodica, per cui vale:

$$\cos(\omega t + \phi + 2\pi) = \cos(\omega t + \phi)$$

Il che implica che possiamo sostituire a t il valore $t + \frac{2\pi}{\omega}$. Questo ci permette di scrivere:

$$\cos(\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \phi) = \cos(\omega t + \phi)$$

Si ha allora che il pendolo oscilla con un periodo T pari a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pendolo da una posizione iniziale verticale

Abbiamo solo analizzato il caso in cui $\theta(0) = A$ e $\frac{d\theta}{dt} = 0$ al tempo $t = 0$. Adesso consideriamo il caso in cui:

- $\theta(0) = 0$;
- $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0} = \Omega$

Segue allora che:

$$\theta(0) = 0 = A \cdot \cos\phi$$

e che:

$$\Omega = -\omega \cdot A \cdot \sin\phi$$

Dalla prima ne deduciamo che $\phi = \frac{\pi}{2}$. Allora:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$\Omega = -\omega \cdot A$$

Pertanto deduciamo:

$$A = -\frac{\Omega}{\omega}$$

Allora:

$$\theta(t) = -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$$

Possiamo calcolare la **velocità della massa** semplicemente ricordando che la velocità tangenziale nel moto circolare uniforme è:

$$v = \omega \cdot R$$

Pertanto:

$$v(t) = \Omega(t) \cdot L$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

05 - Forza elastica, forze di attrito

Supponiamo di avere un punto materiale di massa m attaccato ad una molla. L'esperienza ci insegna che allontanare il punto materiale dalla sua posizione di equilibrio, ossia lo spostiamo di Δx, il punto materiale tende a tornare in una posizione di equilibrio. Deve allora agire una forza sul punto materiale. Chiamiamo tale forza con il nome di **forza elastica**, ed è tale che:

$$\vec{F} = -k \cdot \Delta\vec{x}$$

Se $x_0 = 0$, ossia poniamo la posizione di equilibrio nel centro del sistema di riferimento, si ha che:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

k è la **costante elastica** caratteristica della molla. Maggiore è k, maggiore è la forza che agisce sul punto materiale.

Ci interessa calcolare la legge oraria. L'unica forza rilevante è chiaramente $\vec{F}$.
Il moto del punto materiale è un moto unidirezionale. La legge vettoriale:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

può essere scritta solamente sulla proiezione sull'asse x:

$$\vec{F} = m \cdot a = -kx$$

L'accelerazione è data dalla derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo; pertanto:

$$-kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Per cui l'equazione del moto può essere scritta come:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Questa equazione richiama l'equazione del moto armonico, nonché l'equazione del moto del pendolo semplice. Si ottiene che risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

E quindi si ha che le soluzioni sono:

$$k_1 \cdot \cos\sqrt{\frac{k}{m}} + k_2 \cdot \sin\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Risolvendo come precedentemente, otteniamo:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Le considerazioni sul moto del pendolo semplice possono essere fatte anche su questo moto armonico.

Forze di attrito

Consideriamo un piano orizzontale e immaginiamo di poggiare un blocco di massa m descritto come un punto materiale. Se lasciamo l'oggetto sul piano, il punto materiale rimane in quiete. Oltre alla forza peso, il piano esercita una forza uguale e contraria a questa. Questa forza prende il nome di **reazione normale**, dove con "normale" si intende perpendicolare:

$$\vec{N} = -\vec{P}$$

Questo tipo di forza viene anche chiamata **reazione vincolare**, in quanto il piano vincola, ossia limita, il moto del punto materiale. $\vec{N}$ è allora una reazione vincolare normale.

Il piano non offre solamente una forza normale. Se noi cerchiamo di muovere il punto materiale, occorre una certa forza per muoverlo. Quindi il piano esercita anche una reazione parallela allo stesso. Questa forza prende il nome di **forza di attrito**. L'attrito è la componente tangenziale della reazione vincolare del piano.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Se la forza che esercitiamo è sufficientemente intensa, il corpo può muoversi. La quantità da superare è:

$$\mu_S \cdot N$$

Dove μ_S è il **coefficiente di attrito statico**, e dipende sia dalla superficie del corpo che striscia sia dalla superficie del piano. Allora basta che:

$$F_{ext} \leq \mu_S \cdot N$$

Ma se si ha:

$$F_{ext} > \mu_S \cdot N$$

Allora agisce la **forza di attrito cinematico**:

$$\vec{F}_A = -\mu_C \cdot N \cdot \hat{v}$$

La forza di attrito si oppone al moto. Il vettore $\hat{v}$ è il versore del vettore velocità. Tipicamente (e con "tipicamente" intendiamo che tale risultato è tratto dall'esperienza) vale la relazione:

$$\mu_C < \mu_S$$

Piano inclinato

Consideriamo un punto materiale di massa m su un piano inclinato con un angolazione α. Analizziamone il movimento.

Il corpo esercita una forza $\vec{P}$ sul piano. La componente perpendicolare al piano viene bilanciata dalla reazione normale $\vec{N}$. Ciò significa (indicando la componente perpendicolare di $\vec{P}$ come $\vec{P}_N$:

$$\vec{P}_N + \vec{N} = 0$$

Ne segue:

$$N = mg\cos\alpha$$

La componente tangenziale della forza peso è a sua volta bilanciata dalla forza di attrito:

$$\vec{F}_A + \vec{P}_T = 0$$

Questa relazione vale fintanto che il punto non si stacca dal piano. Avremo:

$$P_T = mg\sin\alpha = \mu_S N = \mu_S mg\cos\alpha$$

Ne deduciamo che:

$$\sin\alpha = \mu_S \cdot \cos\alpha \implies \mu_S = \tan\alpha$$

Allora se l'angolo α è tale che l'uguaglianza è rispettata, il corpo non si stacca. Se invece μ_S è inferiore alla tangente, il punto accelera. Questa equazione prende il nome di **equazione di distacco**. L'angolo di distacco è **indipendente** dal peso o dalla massa dell'oggetto.

Consideriamo allora un angolo α tale che $\tan\alpha > \mu_S$. Allora:

$$P_T + F_A = ma$$

Otteniamo che:

$$mg \cdot \sin\alpha - \mu_C \cdot mg\cos\alpha = ma$$

Da cui:

$$g(\sin\alpha - \mu_C\cos\alpha) = a$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Lavoro di una forza

Consideriamo un punto materiale a cui applichiamo una forza $\vec{F}$ costante. Per effetto della forza, il punto si muove di una quantità pari a $\Delta\vec{s}$. Allora diciamo che:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha$$

L prende il nome di **lavoro**. Il lavoro di una forza misura l'energia trasferita a un corpo (o da un corpo) per effetto dell'azione della forza lungo uno spostamento, e quindi un modo per scambiare energia tra sistemi per mezzo di una forza.

Dove α è l'angolo tra il vettore spostamento e il vettore forza. Tale quantità è massima quando $\vec{F} \parallel \Delta\vec{s}$. Il lavoro è nullo quanto $\vec{F} \perp \Delta\vec{s}$. Il lavoro è minimo quando $\vec{F}$ e $\vec{\Delta}\vec{s}$ sono antiparalleli, in quanto $\alpha = \pi$ in questo caso. Se il lavoro è positivo, la forza sta accelerando il punto materiale; al contrario, se il lavoro è negativo la forza decelera il bersaglio.

Se $\vec{F}$ non è costante, possiamo generalizzare la definizione di lavoro. Sia dato un punto materiale che si muove da un punto A ad un punto B. Definiamo:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Quindi è il prodotto tra $\vec{F}$ e lo spostamento infinitesimo $d\vec{s}$. Il lavoro complessivo che compie la forza dal punto A al punto B è:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{s}$$

Esempio

Consideriamo un punto materiale che si muove verso l'alto con velocità iniziale $\vec{v}_0$. Vogliamo calcolare il lavoro della forza peso complessivo.

Si ha che:

$$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s} = -mg \cdot ds$$

E allora avremo che il lavoro è:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$L = \int_0^h (-mg)\, ds = -mg \int_0^h ds = -mgh$$

Questo è il lavoro che compie la forza peso quando il punto materiale parte dal suolo e raggiunge la quota h. Notiamo che questo lavoro è negativo, pertanto la forza peso rallenta il punto materiale.

Adesso calcoliamo il lavoro che compie la forza peso in caduta. Adesso avremo che lo spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ e la forza peso $\vec{P}$ hanno lo stesso verso. Il lavoro allora è:

$$dL = mg \cdot ds$$

Quindi il lavoro complessivo è:

$$L = mg \int_0^h ds = mgh$$

Questo è il lavoro che compie la forza peso quando il punto materiale è lasciato cadere.

Possiamo calcolare il lavoro considerando che le componenti di spostamento e forza peso hanno componenti solo lungo l'asse y. Avremo allora che:

$$dL = P_y \cdot ds_y$$

La componente della forza peso è $-mg$, per cui:

$$dL = -mg \cdot ds_y$$

Dalla cinematica sappiamo che:

$$v_y = \frac{ds_y}{dt} \implies ds_y = v_y \cdot dt$$

Per cui:

$$dL = (-mg) \cdot v_y dt$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Il moto è uniformemente accelerato con accelerazione pari a $-g$. Ad ogni istante di tempo sappiamo che:

$$v_y(t) = -gt$$

Da cui:

$$dL = mg^2 t \cdot dt$$

Quindi nell'intervallo di tempo infinitesimale dt si compie il lavoro infinitesimale dL. Il lavoro totale è l'integrale:

$$L = \int mg^2 t \, dt = mg^2 \int_0^{t_F} t \, dt = \frac{1}{2} mg^2 t_F^2$$

Notiamo che $v_y(t_F) = -gt_F = v_F$, da cui:

$$L = \frac{1}{2} m v_F^2$$

Questo ci fa vedere che il lavoro positivo ci fa ottenere un aumento di velocità.

Infine, dimostriamo che:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_F^2 \implies gh = \frac{1}{2} v_F^2$$

Dalla legge oraria deduciamo che:

$$0 = h - \frac{1}{2} g t_F^2$$

in quanto al tempo t_F il punto materiale ha toccato il suolo. Si ottiene allora che:

$$h = \frac{1}{2} g t_F^2 \implies gh = \frac{1}{2} g^2 t_F^2 = \frac{1}{2} v_F^2$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

06 - Lavoro della forza peso

Lavoro della forza peso nel moto del pendolo semplice

Consideriamo un oggetto di massa m appeso ad un filo. Fissiamo come condizione iniziale del moto semplice $\vec{v}_0 = 0$, una lunghezza l per il filo e un angolo iniziale $\theta_0 \neq 0$. Osserviamo il pendolo in un tempo $t > 0$ e osserviamo il nuovo angolo θ_t tale che $\theta_0 = \phi + \theta_t$, per cui $\phi = \theta_0 - \theta_t$. Osserviamo anche che il moto della massa lungo l'arco di circonferenza, lo spostamento che ha compiuto la massa è:

$$s = l \cdot \phi = l \cdot (\theta_0 - \theta_t)$$

Noto l'angolo θ_t all'istante t, possiamo sempre stabilire lo spostamento considerando l'angolo $\theta_0 - \theta_t$. Lo spostamento infinitesimale è:

$$ds = -l \cdot d\theta$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso $\vec{P}$ è:

$$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s} = m \cdot \vec{g} \cdot d\vec{s} = m \cdot g \cdot \sin\theta \cdot ds$$

Il lavoro complessivo allora è pari a:

$$L = \int mg \sin\theta \, ds$$

Stiamo integrando sulla variabile s, per cui scriviamo s come $-l \cdot d\theta$ e scriviamo:

$$L = -mgl \int _{\theta_0}^{0} \sin\theta d\theta$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Consideriamo il lavoro al caso in cui il pendolo arriva in posizione verticale. L'integrale ha come risultato:

$$mgl(1 - \cos\theta_0)$$

Se associamo al punto in cui il filo è verticale il punto di ordinata zero e consideriamo le coordinate della massa durante il moto, possiamo indicare con h l'altezza massima della massa durante il moto. Noti l e θ_0, possiamo calcolare h come:

$$h = l - l \cdot \cos\theta_0 = l(1 - \cos\theta_0)$$

Pertanto nella scrittura precedente possiamo scrivere:

$$L = mgh$$

Pertanto nonostante il punto materiale sia vincolato a muoversi lungo un arco di circonferenza, il lavoro che compie la forza peso è ancora uguale a mgh, dove h è la quota iniziale. Per cui **il lavoro della forza peso non dipende dalla traiettoria, ma solo dalla quota iniziale rispetto a quella finale**. Diciamo allora che la forza peso è una **forza conservativa**.

Forza di resistenza viscosa

Su un corpo in caduta libera non agisce solamente la forza peso, ma anche la forza di resistenza dell'aria che si oppone al movimento della palla. Questa forza è la **forza di resistenza viscosa**, ed è tale che:

$$\vec{F}_v = -\beta \cdot \vec{v}$$

Durante il moto, il punto materiale raggiunge una **velocità limite** $\vec{v}_L$, per cui quando il punto raggiunge tale velocità si ha accelerazione nulla. Si ha che la forza di resistenza viscosa bilancia totalmente la forza peso:

$$\vec{P} + \vec{F}_v = 0$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Risulta sufficiente osservare che, scomponendo lungo l'asse y, abbiamo:

$$-mg - \beta v_y = 0$$

Ma sappiamo che la velocità è uguale alla velocità limite quando si raggiunge accelerazione nulla, per cui:

$$-mg - \beta \vec{v}_L = 0$$

Per cui:

$$\vec{v}_L = -\frac{mg}{\beta}$$

$\vec{v}_L$ è negativa poiché la velocità è orientata lungo l'asse y ma verso il basso. La velocità limite è tanto più piccola quanto più grande è β, coefficiente che indica quanto è intensa la resistenza che oppone l'aria al moto.

L'equazione del moto della particella può essere scritta come:

$$\vec{P} + \vec{F}_v = m\vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ci limiteremo a studiare come cambia la velocità nel tempo.

$$-mg - \beta v_y = m\frac{dv_y}{dt}$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine completa. Svolgendo i calcoli otteniamo che:

$$v_y(t) = v_L(1 - e^{-\alpha t}) \quad \alpha > 0$$

Sostituendo si ottiene:

$$-mg - \beta v_L + \beta v_L \cdot e^{-\alpha t} = m v_L \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t}$$

Osservando che $mg = -\beta v_L$, possiamo scrivere:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$\beta v_L e^{-\alpha t} = \alpha m v_L e^{-\alpha t}$$

e sostituendo otteniamo:

$$\beta = \alpha m \implies \alpha = \frac{\beta}{m}$$

Se α è piccolo, l'esponenziale è vicino ad 1, per cui se il corpo è molto massiccio ci mette più tempo per raggiungere la velocità limite. Viceversa, se m è molto piccola, α tende ad infinito e il corpo raggiunge in tempo brevissimo la velocità limite.

Teorema del lavoro e dell'energia cinetica

Consideriamo un punto materiale che si sposta lungo una traiettoria γ da un punto A ad un punto B. Supponiamo che sul punto materiale agisce una forza $\vec{F}$. Sappiamo che:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

In cinematica abbiamo definito:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \implies d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$$

Da cui:

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

Inoltre sappiamo:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Pertanto:

$$dL = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Chiaramente:

$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v} = 2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dividendo per due:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2 = \vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} \implies \frac{1}{2}dv^2 = \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Da tale risultato deduciamo:

$$dL = m\cdot\frac{1}{2}dv^2$$

Essendo $\frac{1}{2}m$ una costante, possiamo portarlo dentro la quantità infinitesimale d, da cui:

$$dL = d\frac{mv^2}{2}$$

Pertanto:

$$L_{AB} = \int_A^B d\frac{mv^2}{2}$$

Indichiamo con K la quantità:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Tale quantità prende il nome di **energia cinetica**. Allora:

$$L_{AB} = K_B - K_A$$

Questo teorema ci dice pertanto che il lavoro svolto da una forza è pari alla differenza di energia cinetica.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Esempio: calcolo della velocità finale di un corpo in caduta libera

Supponiamo di avere un corpo in caduta libera. Vogliamo calcolare la velocità finale.

Sappiamo che sul corpo agisce solo la forza peso (ignorando la resistenza dell'aria). Otteniamo che:

$$mgh = K_{fin} - K_{in}$$

In questo caso però abbiamo che la velocità iniziale è pari a zero. Allora:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_F^2 \implies v_F = \sqrt{2gh}$$

Un risultato che avremmo ottenuto più lentamente utilizzando la legge oraria. Avremo avuto infatti che:

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

E dalla legge della velocità:

$$v(t) = -gt \implies v_F = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

Forze conservative

Una forza si dice **conservativa** se il lavoro che compie la forza dipende solo dallo spostamento e non dalla traiettoria di questo, ossia se vale:

$$L_{AB} = U_A - U_B$$

dove U è l'**energia potenziale**. Analogamnete possiamo dire che:

$$L_{AB} = K_B - K_A$$

Dove K è l'**energia cinetica**. Si ha:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$K_B - K_A = U_A - U_B$$

Questa uguaglianza vale **solo** se la forza è conservativa. Da questa si ricava subito che:

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

Alla quantità $E = K + U$ diamo il nome di **energia meccanica** o **energia totale**. Da cui:

$$E_A = E_B$$

Poiché A e B sono intercambiabili in traiettoria, questo ci permette di dire che l'**energia meccanica è costante**. Quindi nel moto di un punto materiale per effetto di forze conservative, l'energia meccanica di un punto si conserva.

Non tutte le forze sono conservative. Ad esempio, le forze di attrito non sono conservative. Quindi l'energia meccanica di un punto materiale che subisce una forza di attrito non si conserva.
Il risultato ottenuto è noto come il **teorema della conservazione dell'energia meccanica**.

Esempio 1: energia potenziale della forza peso

Utilizziamo la definizione:

$$L_{AB} = U_A - U_B$$

Calcoliamo l'energia potenziale di un punto x_A. Allora è sufficiente conoscere il lavoro che compie la forza per muovere il punto da A a B e sommargli U_{x_B}.

L'energia potenziale in un punto $U(x)$ può subire la seguente trasformazione:

$$U(x) \to U'(x) = U(x) + c$$

Il lavoro per andare da A a B è:

$$L_{AB} = U_A - U_B + c - c$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Quindi l'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva. Possiamo allora scegliere un punto arbitrario tale che l'energia potenziale è nulla:

$$U(x_B) = 0$$

E ottenere:

$$U(x_A) = L_{AB}$$

Quindi consideriamo un punto materiale a quota h. Vogliamo calcolare l'energia potenziale. Dobbiamo calcolare allora il lavoro che compie la forza peso per spostare il punto da $y = h$ ad un punto di riferimento. Per comodità scegliamo $y = 0$. Diciamo che al suolo l'energia potenziale è uguale a zero. Poiché abbiamo già calcolato il lavoro, possiamo dire:

$$U(h) = mgh$$

Esempio 2: forza elastica

Consideriamo un punto materiale di massa m attaccato ad una molla e spostato di una distanza x. La forza elastica sappiamo essere pari a:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Calcoliamo l'energia potenziale del punto materiale.

Sappiamo che:

$$L_{xx_0} = U(x) - U(x_0)$$

Basta dire che l'energia potenziale di questo punto di riferimento è pari a zero per comodità. L'energia potenziale di x sarà:

$$U(x) = \int_x^0 -kx\, dx = -k \int_x^0 x\, dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Quindi $U(x)$ per la forza elastica è pari a $\frac{1}{2}kx^2$.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

07 - Applicazioni della conservazione dell'energia meccanica

Punto materiale lanciato verso l'alto

Consideriamo un punto materiale di massa m lanciato verso l'alto con una velocità iniziale $\vec{v}_0$. La velocità nel punto di quota massima h è pari a 0.
Con la cinematica abbiamo calcolato la quota massima ponendo $v(t) = 0$ e calcolando il tempo t.
Con la conservazione dell'energia meccanica, possiamo risolvere tutto con un singolo passaggio.

La forza peso è conservativa, pertanto:

$$E_{\text{iniziale}} = E_{\text{finale}}$$

Essendo la forza peso conservativa, l'uguaglianza vale in qualunque punto della traiettoria. Quindi anche scegliendo un punto di quota y possiamo sempre verificare che l'energia meccanica è uguale a quella iniziale.

Sappiamo che:

$$E = K + U$$

e che:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

L'energia potenziale della forza peso è:

$$U = mgy$$

dove y indica la quota durante il movimento. Al momento iniziale stabiliamo $U_{\text{iniziale}} = 0$ e quindi:

$$E_{\text{iniziale}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Nel punto di quota massima, $v = 0$ e si ha:

$$E_{\text{finale}} = mgh$$

Poiché energia iniziale e finale sono uguali:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \implies \frac{1}{2}v_0^2 = gh \implies h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Questo quindi ci permette di ridurre il numero di passaggi per ottenere comunque gli stessi risultati osservati.

La conservazione:

$$E = K + U$$

Non significa quasi mai che energia cinetica e potenziale **separatamente** si conservano. Infatti si ha che nel punto di massima quota l'energia potenziale è massima e la cinetica è minima, mentre nel momento iniziale è massima la cinetica e minima la potenziale.

Legge oraria del moto

Sappiamo che:

$$\begin{cases} y(t) = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases}$$

Possiamo calcolare l'energia potenziale e cinetica nel tempo utilizzando la legge oraria. Si ha che:

$$E = K + U = \frac{1}{2}v^2(t) + mgy(t)$$

Dalla legge oraria deduciamo:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$v^2(t) = v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt$$

Sostituendo questo risultato e $y(t)$ all'equazione della conservazione di E otteniamo:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mv_0gt + mgv_0t - \frac{1}{2}mg^2t^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Otteniamo allora che la somma è sempre uguale a $\frac{1}{2}mv_0^2$. L'energia cinetica e la potenziale variano in modo tale che la somma tra queste sia costante.

Caduta libera

Lasciamo un punto materiale di massa m cadere da un'altezza h. Agisce su tale punto la forza peso $\vec{P}$. Vogliamo calcolare la velocità con cui l'oggetto cade.

In cinematica tale problema è stato risolto utilizzando le leggi orarie. Tuttavia questo problema è più semplice ragionando con l'energia meccanica.

Si ha che:

$$E_{\text{iniziale}} = mgh$$

Mentre:

$$E_{\text{finale}} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Allora:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_f = \sqrt{2gh}$$

Pertanto ogniqualvolta in cui abbiamo un moto unidimensionale in cui sono coinvolte forze conservative, è molto conveniente utilizzare la conservazione dell'energia meccanica.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Moto balistico

Lanciamo un punto materiale di massa m con velocità iniziale $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$. Sappiamo che $v_f = (v_{0x}, -v_{0y})$. Noi possiamo comprendere che il modulo della velocità è invariato utilizzando la conservazione dell'energia meccanica.

Essendo il punto materiale a quota zero, l'energia meccanica iniziale è:

$$E_{\text{iniziale}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

L'energia finale invece è:

$$E_{\text{finale}} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Dev'essere:

$$E_{\text{iniziale}} = E_{\text{finale}} \implies \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_0^2 = v_f^2 \implies |v_0| = |v_f|$$

Quindi questo risultato è conseguenza diretta della conservazione dell'energia meccanica.

La conservazione ci permette di capire che il modulo della velocità è costante, ma non ci dice nulla sulla direzione.

Punto materiale che si muove come un pendolo semplice

Utilizziamo la legge di conservazione dell'energia meccanica per calcolare la velocità di un punto materiale che si muove come un pendolo semplice quando il pendolo raggiunge la posizione verticale.

Tramite legge oraria

Per piccole oscillazioni vale:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

E sappiamo che poiché la traiettoria è un arco di circonferenza:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$s = l \cdot \theta$$

Per cui:

$$v = l \cdot \frac{d\theta}{dt} = l \cdot \frac{d}{dt}(\theta_0 \cdot \cos(\omega t)) = -l\omega\theta_0 \sin(\omega t)$$

Poiché il periodo è il tempo di un'oscillazione completa, al tempo:

$$t = \frac{T}{4}$$

il pendolo passa in posizione verticale. Otteniamo allora che:

$$\frac{\omega T}{4} = \frac{1}{4} \cdot \omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

Allora si ha che:

$$v(t = \frac{T}{4}) = -l\omega\theta_0$$

Tramite conservazione dell'energia

Nel momento in cui il pendolo è in posizione verticale, si ha che la differenza di altezza dal momento iniziale è $h = l - l \cdot \cos\theta_0$. A questa quota h corrisponde un'energia potenziale:

$$U_{\text{iniziale}} = mgh = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

L'energia meccanica iniziale è:

$$E_{\text{iniziale}} = U_{\text{iniziale}}$$

Quando il pendolo è in posizione verticale, ossia quando $y = 0$, la sua energia è:

$$E_{\text{finale}} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

in quanto l'altezza è 0. Imponiamo allora:

$$E_{\text{iniziale}} = E_{\text{finale}} \implies mgl(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Quindi deduciamo:

$$v_f = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)} = \sqrt{2gh}$$

La velocità finale è la stessa del moto in caduta libera. Questo non è una sorpresa, in quanto il lavoro della forza peso è sempre lo stesso per il fatto che è una forza conservativa.

Da notare come questo approccio ci permette di ottenere risultati corretti **anche con oscillazioni grandi**. La legge oraria infatti ci permette di stabilire la velocità finale solamente in casi di piccoli oscillazioni. Generalmente fino a quando $\theta_0 \leq 10°$ è ancora possibile utilizzare la legge oraria.

La formula della velocità può essere scritta come:

$$v_f = \sqrt{2gl} \cdot \sqrt{1-\cos\theta_0}$$

Ma sappiamo che:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad x \to 0$$

Quindi per piccole oscillazioni:

$$\cos\theta_0 \approx 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$$

Pertanto:

$$v_f = \sqrt{2gl} \cdot \sqrt{\frac{\theta_0^2}{2}} = \theta_0\sqrt{gl}$$

Ma noi sappiamo che:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \implies g = \omega^2 \cdot l$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Da cui deduciamo:

$$v_f = \theta_0 \sqrt{\omega^2 l^2} = \theta_0 \cdot \omega \cdot l$$

Pertanto il risultato è in accordo, considerando il modulo.

Quantità di moto

Sappiamo che se su un corpo agisce una forza $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, allora il corpo subisce un'accelerazione $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Ma poiché:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

si verifica che:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Per cui:

$$\vec{F}dt = md\vec{v} \implies \int_{t=0}^{t} \vec{F}dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} md\vec{v} = m \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_0)$$

Indichiamo la quantità $\vec{p} = m\vec{v}$ come **quantità di moto**. L'integrale della forza rispetto al tempo:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}dt$$

prende il nome di **impulso della forza**. Allora:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

Ed è un modo alternativo per scrivere il secondo principio della dinamica.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

In un sistema isolato vale un principio: **la quantità di moto totale del sistema isolato è costante**. Questo è legato alla **invarianza per traslazione**. Quindi un sistema isolato è invariante per traslazione.

Riscriviamo ora il secondo principio della dinamica:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Essendo la massa costante:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Su un punto materiale allora agisce una forza se di questo punto materiale cambia la quantità di moto. Oppure possiamo definire la forza come l'entità che cambia la quantità di moto di una particella.

Esempio: moto del missile

Il moto del missile è un moto in cui la massa non è costante. Durante il moto di salita il missile eietta molto gas a causa della combustione, pertanto la sua massa si abbassa nel tempo. L'equazione della dinamica nella sua prima formulazione non è più valida in quanto la massa non è più costante. Dobbiamo utilizzare la forma che utilizza la quantità di moto.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

08 - Urti

Abbiamo detto che:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

Consideriamo adesso un oggetto che si muove lungo una parete **liscia**, urtandola. L'esperienza ci dice che l'oggetto rimbalza. Chiamiamo θ_0 l'angolo rispetto all'asse x della traiettoria con cui l'oggetto colpisce la parete (angolo di **incidenza**), mentre θ_f è l'angolo della traiettoria del rimbalzo (angolo di **riflessione**). Sia $\vec{v}$ la velocità iniziale e $\vec{V}$ quella finale.

Supponiamo per ora che $\vec{F}_A = 0$. Indichiamo con $\vec{P}$ la quantità di moto finale, e con $\vec{p}$ la quantità di moto iniziale. Se la forza che agisce sull'oggetto lungo y è nulla, si ha che $P_y = p_y$, da cui $V_y = v_y$. Supponiamo che l'urto sia **elastico**, ossia valga:

$$K_i = K_f$$

Ossia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 \implies v^2 = V^2$$

Pertanto:

$$v_x^2 + v_y^2 = V_x^2 + V_y^2$$

La parete è liscia, pertanto **non esercita alcuna forza di attrito**: ne segue, quindi, che forze parallele alla parete (ossia lungo l'asse y) non sono presenti. Se non sono presenti forze su y, la quantità di moto lungo l'asse y si conserva. Poiché la massa dell'oggetto è costante, lo è anche la velocità:

$$v_y = V_y$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Si ha allora:

$$v_x^2 = V_x^2 \implies V_x = \pm v_x$$

Consideriamo allora il segno negativo. Ricaviamo adesso la relazione tra l'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione.

$$\cos\theta_f = \frac{V_x}{V} = \frac{-v_x}{v}$$

Consideriamo adesso θ_0. L'angolo supplementare, che indichiamo con α, è tale che:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \cos(\pi - \theta_0) = -\cos\theta_0$$

Questo perché quando consideriamo l'angolo supplementare, la componente lungo x è v_x, che ha segno negativo, pertanto è corretto dire che il coseno di tale angolo è $\frac{v_x}{v}$. Vale infine che il coseno di un angolo è l'opposto del suo supplementare.

Quindi:

$$\cos\theta_0 = \frac{-v_x}{v}$$

Pertanto abbiamo dimostrato che $\cos\theta_0 = \cos\theta_f$, e quindi modulo π si ha $\theta_0 = \theta_f$.

Usando la seconda legge della dinamica:

$$\vec{I} = \vec{P} - \vec{p} = m\vec{V} - m\vec{v}$$

Si ha che $I_y = 0$. Pertanto:

$$I_x = P_x - p_x = mV_x - mv_x$$

Sappiamo da ciò che abbiamo ricavato prima che $V_x = -v_x$. Possiamo allora scrivere il risultato come:

$$I_x = 2mV_x = 2mV\cos\theta_0$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Per definizione:

$$I_x = \int_0^\tau F_x \, dt$$

Possiamo avere il valore medio di F seguendo la regola generica:

$$< f >= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Quindi la quantità media è:

$$< F_x >= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_x \, dt = \frac{2mV \cos\theta_i}{\tau}$$

Il valore di τ dipende da tanti fattori:

- la velocità con cui la pallina incide;
- il materiale della pallina;
- il materiale della superficie urtata.

Se la pallina è fatta di metallo, ad esempio, e la pallina viene lanciata a $1 \, \frac{m}{s}$, allora $\tau \approx 40 - 60 \mu s$. Nell'intervallo di tempo τ in cui la pallina interagisce con la parete, la forza è molto grande, tanto da poter trascurare le forze esterne (come la forza peso). Quando ciò accade (intervalli piccole con forze intense), si dice che il processo è **impulsivo**. Il sistema pertanto può essere approssimato ad un sistema isolato, ossia un sistema su cui non agiscono forze esterne e in cui la quantità di moto totale rimane costante. Pertanto in processi impulsivi, la quantità di moto totale è conservata. Questo è vero qualunque sia il tipo di processo impulsivo. Da notare che ciò vale solo nell'intervallo di tempo τ, intervallo in cui vi è la collisione.

Possiamo generalizzare questo tipo di problema non limitandoci a considerare l'urto o la collisione con una parete, ma per esempio al caso in cui ci sono due punti materiali che interagiscono tra di loro. Definiamo un processo di **urto** o **collisione** un processo in cui il valore medio delle forze interne in un certo intervallo di tempo τ è molto più grande del valore medio delle forze esterne. L'impulso totale in questo caso è **costante**.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Urto elastico tra due punti materiali

Un **urto elastico** è un urto in cui si conserva sia la quantità di moto che l'energia cinetica.
Consideriamo un caso in cui un punto materiale di massa m_1 e velocità $\vec{v}_1 \neq 0$ urta un punto materiale di massa m_2 con velocità iniziale $\vec{v}_2 = 0$.

Osserviamo che:

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

per il fatto che $v_2 = 0$. Abbiamo inoltre:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Mettendo a sistema otteniamo:

$$\begin{cases} v_1 = V_1 + \frac{m_2}{m_1} V_2 \\ v_1^2 = V_1^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2 \end{cases}$$

Procediamo:

$$\begin{cases} V_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2 \\ v_1^2 = (v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2)^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2 \end{cases}$$

Espandiamo la seconda equazione:

$$v_1^2 = v_1^2 - 2\frac{m_2}{m_1} v_1 V_2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} V_2^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2$$

Semplificando:

$$0 = \frac{m_2}{m_1} V_2 (-2v_1 + \frac{m_2}{m_1} V_2 + V_2)$$

Si tratta di un'equazione di secondo grado che ammette due soluzioni:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

- $V_2 = 0$. Questa soluzione non è accettabile, in quanto significa che non c'è stata alcuna collisione. La particella infatti è rimasta ferma;
- $\frac{m_2}{m_1}V_2 + V_2 = 2v_1$. Semplificando questa otteniamo $V_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$.

Adesso che abbiamo V_2, calcoliamo V_1 dalla prima:

$$V_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_1 = v_1(1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}) =$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}v_1$$

Si ha allora che se $m_1 = m_2$, $V_1 = 0$ e $V_2 = v_1$. Se invece $m_1 << m_2$, si ha che $V_2 \approx 0$ e la particella con massa molto grande rimane praticamente ferma. Si ha allora che $V_1 \approx -v_1$. Infine, se $m_1 >> m_2$, si ha $V_2 \approx 2v_1$ e $V_1 \approx v_1$.

Urto anelastico

Prende il nome di **urto perfettamente anelastico** la situazione per cui due punti materiali si muovono uno assieme all'altra, formando un unico corpo in movimento di massa $m_1 + m_2$.
Consideriamo un punto materiale di massa m_1 che si muove con velocità $\vec{v}_1 \neq 0$, e un punto materiale di massa m_2 con velocità $\vec{v}_2 = 0$. La legge di conservazione dell'impulso è sufficiente:

$$m_1v_1 = m_1V_1 + m_2V_2$$

Se le due particelle si spostano insieme, si ha:

$$V_1 = V_2 = V$$

E quindi:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)V \implies V = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$$

Se $m_1 >> m_2$, $V \approx v_1$. Se $m_2 >> m_1$, $V \approx \frac{m_1}{m_2}v_1 \approx 0$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Urto elastico tra punti che si incontrano

Consideriamo un oggetto di massa m_1 che si muove ad una velocità $\vec{v}_1$ e che urta un oggetto di massa m_2 che si muove verso il primo oggetto con velocità $\vec{v}_2 \neq 0$. Assumiamo di studiare il problema nel sistema di riferimento Oxy. Tale osservatore misura le velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Considereremo adesso un sistema di riferimento **solidale** all'oggetto 2, ossia tale che esso sia centrato nella massa m_2. Questo osservatore $O'x'y'$ si sposta con velocità $\vec{v}_2$. Chiaramente la velocità della particella in questo sistema è $\vec{v}_2' = 0$. Ci mettiamo allora nella condizione dell'urto elastico quando la pallina è ferma: la velocità $\vec{v}_2' = 0$, e l'oggetto di massa m_1 si muove verso di lui, ma l'asse x' è sempre orientato a destra.

Cerchiamo allora di risolvere il sistema in Oxy. Prendiamo un punto generico dello spazio P. Per questo punto misuriamo la posizione nel sistema Oxy, che chiamiamo $\vec{r}_P$. Chiamiamo invece $\vec{r}_P'$ il vettore posiizione nel sistema O'. Infine, consideriamo $\vec{r}_{O'}$ come la posizione di O' in Oxy.

Chiaramente si osserva che:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_P' + \vec{r}_{O'}$$

Essendo la velocità la derivata del vettore posizione, si ha che:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P' + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}$$

La seconda derivata non è altro che la velocità del sistema $O'x'y'$, quindi è proprio pari a $\vec{v}_2$. Pertanto:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P + \vec{v}_2$$

Allora possiamo dire che:

$$V_1 = V_1' + v_2$$

$$V_2 = V_2' + v_2$$

$$V_1 = v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1'$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Osserviamo che:

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_2 \iff \vec{v}'_P = \vec{v}_P - v_2$$

E quindi possiamo sostituire a v'_1 la quantità $(v_1 - v_2)$:

$$V_1 = v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$V_2 = v_2 + \frac{2m}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

Se abbiamo che le due masse m_1, m_2 sono uguali, si osserva che dopo la collisione:

$$V_1 = v_2$$

$$V_2 = v_1$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

09 - Legge di gravitazione universale

Consideriamo due masse m_1, m_2 e il vettore $\vec{r}_{12}$ come il vettore centrato nel punto 1 e che punta nel punto 2. Sui punti agisce una forza:

$$\vec{F}_r = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

La forza è **attrattiva**. Infatti applicata al punto 2 la forza $\vec{F}_r$ è orientata verso 1. Quindi è una forza che attrae il punto 2 al punto 1.

La formula vale solo se i sistemi sono **puntiformi**. In realtà si può generalizzare a due sistemi sferici, come la Terra e la Luna. In quel caso la distanza $\vec{r}$ è la distanza tra i centri dei due corpi. La forza, inoltre, è valida solo all'esterno dei due corpi.

La forza di gravità è **conservativa**. Il lavoro compiuto dalla forza è:

$$L_{AB} = U_A - U_B$$

L'energia potenziale U è:

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Forza peso e forza di gravità

Si può dimostrare che la forza peso è derivata dalla forza di gravità.
Consideriamo un punto che si trova sulla superficie terrestre. La distanza dal centro della Terra è R_T.
Il modulo della forza sul punto materiale è:

$$|F| = G\frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = mg$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

dove:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

La costante $G = 6.66 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$, mentre $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Infine, il raggio $R_T = 6.4 \cdot 10^6$ m. Calcolando il prodotto è pari a 9.81.

La costante G prende il nome di **costante di gravitazione universale**, ed è indipendente dal tipo di materiale del corpo scelto, nonché costante per tutti i corpi celesti. Al momento nessun esperimento dimostra che il denominatore ha esponente diverso da 2.

Dalla cinematica abbiamo visto che se lanciamo un oggetto in aria, la quota massima è:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

La legge sottolinea come il modulo v_0 permetta di raggiungere quote più alte. Allora è possibile lanciare un punto materiale con velocità talmente grande che il punto materiale non scende più?

La risposta è sì; tale velocità prende il nome di **velocità di fuga**. Chiamiamo velocità di fuga la velocità che deve avere un punto materiale verso l'alto affinché questo arrivi a distanza infinita dal corpo celeste con veocità nulla. Calcoliamola (urra!).

Il punto materiale viene lanciato a velocità $\vec{v}_f$, dove con f indichiamo "fuga". L'energia meccanica iniziale è:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

La velocità di fuga è tale che la velocità finale dopo il lancio è nulla, quindi l'energia cinetica finale è $K_f = 0$. Stiamo inoltre assumendo che il punto materiale arrivi a distanza infinita dalla sorgente. Se poniamo la distanza infinita, l'energia potenziale vale 0. Pertanto:

$$E_f = 0$$

Poiché lavoriamo con forze conservative, l'energia meccanica si deve conservare. In alternativa, la velocità di fuga è definita come la velocità tale che l'energia meccanica sia nulla.
Abbiamo tutto ciò che serve per calcolare la velocità:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

10 - Introduzione alla termodinamica

Quando abbiamo parlato di meccanica e analizzato il pendolo semplice, abbiamo sempre supposto il caso di assenza di attrito. Le forze di attrito infatti disperdono l'energia meccanica. In un sistema reale infatti, l'oscillazione del pendolo termina dopo un certo tempo t. Inoltre, con un termometro preciso, possiamo misurare un aumento della temperatura dell'aria. Nel caso del pendolo si parla di aumenti microscopici.
Ad un fenomeno meccanico è associato un fenomeno termico. L'ambiente diventa più caldo rispetto alla situazione iniziale. Ci dev'essere allora un trasferimento di energia, non descritto dalle leggi della meccanica a livello macroscopico.

Consideriamo un altro esempio. Supponiamo di avere una ruota che gira ad una velocità angolare ω. Avviciniamo a questa ruota un freno che rallenta la ruota fino a quando non si ferma. Man mano che le forze di attrito compiono lavoro, la temperatura del gas aumenta. Anche in questo caso ad un fenomeno meccanico (la forza di attrito) è accompagnato un fenomeno termico. Dal punto di vista macroscopico non si può più usare solamente la meccanica: il sistema meccanico può scambiare energia con l'ambiente in modo diverso dalle forze che compiono lavoro.

La **termodinamica** si occupa di allargare il campo della dinamica tenendo conto degli effetti termici.

Temperatura

La temperatura è una grandezza fisica per quantificare lo stato termico in cui si trova un corpo. Il termometro storicamente è nato osservando che alcune sostanze a seconda della temperatura cambiano le loro dimensioni. Al freddo un pezzo di metallo ha una certa lunghezza, che aumenta quando il pezzo è caldo di una quantità Δl. Maggiore è la lunghezza, maggiore l'oggetto è caldo.

Questo ci permette di creare uno strumento per misurare la temperatura. Introduciamo allora una scala di temperatura.
La più comune è la **scala Celsius**, o **scala centigrade**. La temperatura $0°C$ corrisponde alla temperatura di congelamento dell'acqua, e $100°C$ è la temperatura di ebollizione dell'acqua.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Scambio di calore

Se due sistemi A e B hanno temperature T_A, T_B e sappiamo che le temperature sono uguali alla temperatura di un sistema C, la temperatura di A è uguale alla temperatura di B. Si tratta di una proprietà transitiva che permette di confrontare le misure di temperatura di due sistemi diversi. Assumeremo ciò come principio.

Se invece abbiamo due sistemi a differente temperatura, questi sistemi **scambiano calore**. Ciò non ha nulla a che vedere con scambio di energia meccanica. Il modo di scambiare energia è il **calore**. Il **calore** non è una forma di energia, ma è un modo di scambiare energia tra due sistemi che hanno temperature diverse, così come il lavoro è il modo con cui la forza scambia energia con un punto materiale. Più precisamente, se le temperature sono $T_1 > T_2$, i corpi scambiano calore fino a quando non si raggiunge una temperatura T tale che:

$$T_2 < T < T_1$$

Lo scambio di calore avviene da quello più caldo a quello più freddo. Questo perché il sistema caldo ha molecole più eccitate rispetto a quello freddo, e quindi ha più probabilità di scambiare calore tramite gli urti delle proprie molecole con quelle dell'altro sistema.

Sistemi

In termodinamica si hanno sistemi con un numero di particelle dell'ordine del numero di Avogadro (10^{23}). Diventa allora impossibile tracciare lo stato meccanico di ogni singola particella che compone il sistema. Pertanto ci limitiamo a considerare grandezze medie dei sistemi, quali la temperatura, la pressione e altro.
Un sistema termodinamico è un sistema fisico di cui non ci interessano dettagli microscopici, ma poche grandezze macroscopiche che lo caratterizzano. Tali grandezze prendono il nome di **variabili di stato**.

Esistono diversi tipi di sistemi:

- **sistemi isolati**. Tali sistemi non scambiano né energia né materia con l'ambiente esterno. Sono i più semplici da analizzare;
- **sistemi chiusi**. Tali sistemi non scambiano materia ma solo energia con l'ambiente;
- **sistemi aperti**. Tali sistemi scambiano sia materia sia energia con l'ambiente. Sono i sistemi più complessi da studiare.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Analizzeremo principalmente sistemi isolati e chiusi.

Equilibrio

Quando parliamo di equilibrio non possiamo parlare solamente di equilibrio meccanico. Esistono infatti modi di scambiare energia che non sono puramente meccanici.

Un sistema termodinamico si dice in **equilibrio termico** quando nel sistema non ci sono gradienti termici, ossia la temperatura è uguale in ogni punto del sistema.

Un sistema dinamico invece si dice in **equilibrio chimico** quando la composizione chimica del sistema non cambia.

Calore

Il calore è un modo di scambiare energia. Storicamente è stata introdotta un'unità di misura del calore, usata spesso in chimica, che è la **caloria**. Per definire la caloria, introduciamo il **calorimetro**.

Immaginiamo di avere un recipiente in cui abbiamo acqua ad una certa temperatura che conosciamo con precisione. Mettiamo a contatto questo sistema con un altro corpo, e andiamo a misurare il calore che il sistema cede. Possiamo allora misurare di quanto cambia la temperatura dell'acqua. Definiamo la **caloria** come la quantità di calore scambiata in modo tale che la temperatura di un grammo di acqua distillata passi da $14.5°C$ a $15.5°C$. Questo intervallo di temperatura è preciso: infatti la capacità termica dell'acqua è costante, per cui è possibile mettere in relazione diretta il cambio di temperatura dell'acqua con il calore scambiato.
Poichè è una forma di energia, il calore può anche essere misurato in Joule (J) e principalmente utilizzeremo questa unità di misura.

In termodinamica il calore è **positivo** se assorbito e **negativo** se ceduto all'esterno.

Trasformazione

Con **trasformazione termodinamica** intendiamo un processo in cui i valori di stato del sistema cambiano. Una trasformazione è **tra stati di equilibrio** se stato iniziale e finale sono stati di equilibrio termodinamico. Assumeremo sempre che stato iniziale e stato finale siano stati all'equilibrio termodinamico. Se stato finale e uguale coincidono, la trasformazione si dice **ciclica**.

Un caso estremamente utile di trasformazioni ideali è il caso delle **trasformazioni quasi-statiche**. Si tratta di una trasformazione durante la quale il sistema passa solo attraverso stati di equilibrio termodinamico. Il processo avviene in maniera lenta e ogni passaggio ha il sistema in uno stato di equilibrio termodinamico. Le trasformazioni quasi-statiche sono **ideali**, perché in natura non esistono trasformazioni che avvengono in tempo infinito, ma sono utili per comprendere informazioni di sistemi ideali.
Una trasformazione quasi-statica si dice **reversibile** se dallo stato finale SF si può ritornare allo stato iniziale SI ripercorrendo gli stati intermedi che hanno portato da SI a SF. Non tutte le trasformazioni quasi-statiche sono reversibili: ad esempio, se una ruota gira lentamente da un punto A ad un punto B e ripercorriamo dal punto B al punto A, la ruota assorbe sempre calore dal pavimento per via della forza d'attrito, per cui non è reversibile. Nella realtà in natura non esistono trasformazioni reversibili.

Una trasformazione si dice **spontanea** quando un sistema isolato raggiunge lo stato di equilibrio. Supponiamo di avere un sistema formato da una barra metallica. Inizialmente la barra ha una temperatura T. Mettiamo a contatto la barretta con due sorgenti termiche a temperatura T_1, T_2: la prima è una **sorgente calda**, la seconda una **sorgente fredda**. Assumiamo pertanto che $T_1 > T_2$. Aspettiamo un tempo sufficientemente grande in modo tale che la temperatura della barretta non è più costante, ma dipende dalla distanza dalla sorgente più calda: sulla parte a contatto con la sorgente calda, la temperatura è uguale a T_1, mentre sulla parte a contatto con la sorgente fredda si ha temperatura T_2. Il sistema spontaneamente raggiungerà uno stato stazionario.
Supponiamo adesso di staccare le sorgenti dal sistema. Quello che osserviamo è che la temperatura della barretta torna ad essere omogenea, ma la temperatura di equilibrio è la media aritmetica:

$$\overline{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Anche questo processo è spontaneo: esso avviene senza che noi facciamo nulla, e il sistema raggiunge uno stato di equilibrio termodinamico senza l'intervento di forze.

Gas perfetto

Un **gas perfetto** è un sistema termodinamico in cui il volume delle particelle del gas è trascurabile. Le particelle di gas sono considerabili come punti materiali. Inoltre, assumiamo che le forze a distanza tra le molecole (elettriche, gravitazionali e molecolari) siano assenti. Le uniche interazioni che hanno le molecole di gas sono:

- con le pareti del recipiente;

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

- con altre molecole.

In entrambi i casi sono urti elastici. I primi sono necessari per la pressione, il secondo per far sì che il gas raggiunga l'equilibrio termodinamico.

In natura non esistono gas perfetti, ma i gas reali si comportano come gas perfetti quando sono **rarefatti**. Sono stati svolti molti esperimenti sui gas rarefatti che analizzano i cambiamenti di pressione e temperatura.
Supponiamo che il volume del gas sia costante. I nuovi valori di pressione e temperatura saranno tali che:

$$P = P_0(1 + \alpha T(°C))$$

Se invece la pressione è costante, volume e temperatura cambiano seguendo la legge:

$$V = V_0(1 + \alpha T(°C))$$

Il valore α è la costante:

$$\alpha = \frac{1}{273.15°C}$$

ed è una costante indipendente dalla natura del gas. In queste formule, inoltre, si utilizza una **misurazione universale** di temperatura, la **scala Kelvin**:

$$T(K) \equiv T(°C) + 273.15$$

Da questa deduciamo:

$$T(K) - T(°C) = 273.15$$

La scala Kelvin è pertanto uno spostamento della scala Celsius del valore 273.15, che corrisponde allo 0 della scala Celsius.

Si osserva ad esempio dalla formula P:

$$P = P_0(1 + \alpha T(°C)) = P_0(\frac{273.15 + T°(C)}{273.15}) = P_0\frac{T(K)}{T_0}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Dividendo ambo i membri per T:

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{P}{T}$$

Sperimentalmente si osserva che a temperatura $T = 0K$ la pressione del gas va a zero. Lo zero in questa scala di temperatura è la temperatura più bassa raggiungibile in natura. Si tratta inoltre di un punto **asintotico**.

Consideriamo pertanto una trasformazione a volume costante, ossia una **trasformazione isocora**:

$$P_1 = P_0 \frac{T}{T_0}$$

Con questa trasformazione passiamo da (P_0, V_0, T_0) a (P_1, V_0, T). Dopo questa trasformazione facciamo una trasformazione a temperatura costante, ossia una **trasformazione isoterma**. Dalla legge di Boyle si ha che passando da (P_1, V_0, T) a (P, V, T) vale:

$$P_1 V_0 = PV$$

Poiché P_1 è derivabile dalla relazione precedente, si ottiene:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$$

La quantità $\frac{PV}{T}$ è una **costante universale** che per convenzione consideriamo essere pari al numero di moli per la costante universale dei gas perfetti:

$$\frac{PV}{T} = nR \quad R = 8.314 \frac{J}{mol \cdot K}$$

Moltiplicando ambo i membri per T si ottiene l'**equazione di stato dei gas perfetti**:

$$PV = nRT$$

L'equazione di stato introduce un vincolo per i gas perfetti: per un gas perfetto bastano due parametri come volume e temperatura per determinare in maniera univoca lo stato del gas.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Concludiamo con una relazione tra temperatura e energia cinetica totale. Supponiamo di avere un gas perfetto. Il numero totale di particelle N_{tot} è tale che:

$$N_{tot} = n \cdot N_A$$

L'energia cinetica totale del sistema è:

$$K_{tot} = \sum_{i=1}^{N_{tot}} \frac{mv_i^2}{2}$$

Si può dimostrare che vale la relazione:

$$PV = \frac{2}{3} K_{tot}$$

Osserviamo che l'energia cinetica media è:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{i=1}^{N_{tot}} \frac{mv_i^2}{2} = \frac{K_{tot}}{N_{tot}} = \frac{K_{tot}}{n \cdot N_A}$$

Quindi otteniamo:

$$PV = \frac{2}{3} n \cdot N_A \cdot \langle K \rangle$$

Ricordando l'equazione di stato:

$$nRT = \frac{2}{3} n \cdot N_A \cdot \langle K \rangle$$

Quindi:

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{N_A}{R} \langle K \rangle$$

Indicando la quantità $\frac{R}{N_A}$ si indica con k_B e prende il nome di **costante di Boltzmann**:

$$T = \frac{2}{3k_B} \langle K \rangle$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

11 - Calore

Il cambiamento di temperatura di un sistema termodinamico può essere correlato con il calore scambiato con l'esterno. Si osserva infatti che:

$$\delta Q = mc(T)dT \quad \delta Q = nC(T)dT$$

Le trasformazioni valgono solo se la temperatura del sistema cambia. dT è la variazione di temperatura infinitesimale. mc e nC sono le **capacità termiche del sistema**. m è la massa, n è il numero di moli, c è il calore specifico, C è il calore molare del sistema. Più precisamente:

- il **calore specifico** è il calore necessario per innalzare la temperatura di $1\ kg$ di 1 grado Kelvin;
- il **calore molare** è il calore necessario per innalzare la temperatura di 1 mole di 1 grado Kelvin.

Da notare come in questo caso il calore scambiato dipende dalla trasformazione e non solo dalla temperatura iniziale e finale, per cui **non è un differenziale esatto**. Inoltre, con una buona approssimazione il calore molare è **indipendente dal solido**, mentre il calore specifico dei solidi è **indipendente dalla temperatura**. Con buona approssimazione è:

$$C = 3R$$

Essendo il calore specifico una costante, il calore scambiato dal solido è dato da:

$$Q = mc(T_2 - T_1) = nC(T_2 - T_1)$$

dove T_2 è la temperatura finale e T_1 è quella iniziale.

Supponiamo di avere un sistema isolato e di avere due oggetti di temperatura T_1 e T_2, con $T_1 > T_2$. Notiamo che il calore ceduto dal corpo più caldo è un calore negativo, mentre il calore ricevuto dal corpo più freddo è positivo. Si osserva:

$$Q_1 = -Q_2 \iff Q_1 + Q_2 = 0$$

Questa è la condizione del sistema isolato, in quanto $Q_1 + Q_2$ è il calore totale che il sistema scambia con l'esterno.
L'esperienza ci dice che il calore ceduto dal corpo 1 e acquisito dal corpo 2 sarà tale da portare entrambi i corpi alla temperatura di equilibrio T_{eq}. Si osserva allora:

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_{eq} - T_1) \quad Q_2 = m_2 c_2 (T_{eq} - T_2)$$

Si osserva allora:

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

L'approccio non dà alcuna informazione sul tempo effettivo impiegato per il raggiungimento dell'equilibrio, ma solo la temperatura finale. Sotto l'ipotesi che $m_1 c_1 >> m_2 c_2$, si osserva che T_{eq} tende a T_1. Se un corpo ha capacità termica molto più grande, cede calore senza cambiare sensibilmente la propria temperatura (se fosse stato un corpo più freddo, avrebbe assorbito calore, sempre senza cambiare sensibilmente la propria temperatura). Osserviamo infine che la temperatura di equilibrio è data dalla media pesata delle temperature in virtù delle capacità termiche.

Lavoro

In meccanica abbiamo detto che il lavoro compiuto da una forza dipende dallo spostamento e dalla sua direzione. In termodinamica abbiamo un intero sistema termodinamico.
Immaginiamo di avere un gas contenuto in un contenitore su cui è posto un pistone. La pressione esterna è pari a P, e supponiamo che inizialmente il gas abbia pressione P uguale all'ambiente esterno (è in **equilibrio meccanico** con l'ambiente esterno). Riscaldiamo il gas in maniera quasi statica: il gas passa da uno stato iniziale ad uno stato finale in modo molto lento, così che per ogni istante possiamo definire ogni parametro termodinamico. La pressione sarà quindi sempre in equilibrio con la pressione esterna P. Il volume del gas passa da un valore V_1 ad un valore V_2 tale che:

$$V_2 = V_1 + Sdh$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

dove dh è la differenza di altezza nel contenitore e S è la superficie del pistone. La pressione è definita come il rapporto tra forza ed area. Il lavoro è dato da:

$$\delta L = PSdh$$

e poichè:

$$Sdh = dV$$

si osserva:

$$\delta L = PdV$$

Questo lavoro prende il nome di **lavoro di espansione**. Ogni volta che un sistema termodinamico cambia il suo volume, c'è un lavoro di espansione.
Notiamo che non stiamo assumendo che la pressione sia costante, ma stiamo assumendo che per il tratto dV possiamo definire la quantità P. Se il sistema non fa una trasformazione infinitesima, ma una trasformazione finita da A a B, il lavoro complessivo è l'integrale:

$$L_{AB} = \int_A^B PdV$$

Il lavoro è l'area sotto la curva che connette A e B. Possiamo anche avere un'altra trasformazione che ci porta dallo stato A allo stato B, con un lavoro diverso. Il lavoro pertanto **dipende dalla trasformazione**. Questo corrisponde al concetto meccanico di **lavoro di forza non conservativa** (ossia dipendente dallo traiettoria). Sia calore che lavoro dipendono dalla trasformazione che il sistema subisce.

Primo principio della termodinamica ed energia interna

Esperienza di Joule

Consideriamo un recipiente in cui c'è un fluido (e.g. acqua). Al recipiente sono attaccate delle palette libere di ruotare. Il meccanismo è legato ad un peso: quando questo scende, le palette girano. Calcoliamo il lavoro che la forza compie quando il peso scende.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Mentre il peso scende, per attrito l'acqua si riscalda. Dopo che il peso è sceso, aspettiamo che l'acqua torni allo stato iniziale, cedendo calore ad un calorimetro esterno. L'acqua in complesso fa una trasformazione ciclica: stato iniziale e finale coincidono. In questa esperienza il lavoro della forza peso è $L_P = mgh$. Il valore Q inoltre è noto sperimentalmente. Quesllo che si osserva è:

$$\frac{L}{Q} = 4.186 \frac{Joule}{cal}$$

Si tratta dell'equivalente meccanico della caloria. Questo ci dice che partendo da un calore misurato in calorie e moltiplicandolo per la costante 4.186, possiamo misurare il calore con la stessa unità di misura con cui misuriamo l'energia.

Esprimendo Q in Joule, il rapporto diventa pari ad 1 e $Q - L = 0$. Per ogni trasformazione ciclica, il calore scambiato è uguale al lavoro.

Prendiamo allora una trasformazione generica che porta il sistema da uno stato A ad uno stato B. Supponiamo di arrivare da A a B tramite due trasformazioni a, b. Supponiamo di tornare da B ad A con la trasformazione c. Osserviamo che:

$$(Q-L)_a + (Q-L)_c = 0 \land (Q-L)_b + (Q-L)_c = 0 \implies (Q-L)_a - (Q-L)_b = 0$$

Ossia:

$$(Q-L)_a = (Q-L)_b$$

Ossia la differenza non dipende dalla trasformazione ma solo dagli stati iniziale e finale.

Primo principio della termodinamica

Definita la funzione U come l'**energia interna di sistema** che rappresenta la totalità delle energie di sistema, si ha che:

$$Q - L = U(B) - U(A)$$

Il ragionamento può essere applicato per i gas. Abbiamo nei gas:

- energia cinetica di traslazione;

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

- energia cinetica di rotazione;
- energia di vibrazione molecolare;
- energia di legame molecolare.

Il principio pertanto afferma che la variazione di energia interna è pari alla differenza tra il calore ceduto e il lavoro compiuto dal sistema chiuso durante la trasformazione da A a B. Se Q è uguale a zero si ha:

$$-L = U(B) - U(A)$$

Quando il lavoro è maggiore di zero si ha che $U(A) > U(B)$, pertanto se il sistema compie lavoro la sua energia interna diminuisce; il viceversa è altrettanto valido.

Se $L = 0$ si ha che:

$$Q = U(B) - U(A)$$

Si ha che se $Q > 0$ il sistema assorbe calore e si alza l'energia interna, mentre se cede calore si abbassa l'energia interna.

Energia interna di un corpo solido

Se un corpo è solido le variazioni di temperatura sono sufficientemente piccole in modo tale da trascurare le variazioni di volume. Ossia, il riscaldamento è tale che il volume non cambi.

In questo caso, essendo $dV = 0$ il lavoro di espansione è 0 e quindi:

$$\delta Q = dU$$

Ma sappiamo:

$$\delta Q = mc(T)dT$$

Dal primo principio:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$U(T_B) - U(T_A) = m \int_{T_A}^{T_B} c(T) dT \approx mc(T_B - T_A)$$

L'approssimazione è dovuta al fatto che possiamo approssimare il calore specifico come una costante. Quindi:

$$U(T) = mcT + \text{costante}$$

La costante è arbitraria e irrilevante.

Energia interna di un gas perfetto

Dividiamo un recipiente a pareti rigide in due bocce. Inizialmente abbiamo il gas nella prima metà, che indicheremo con A. La seconda metà, che indicheremo con B, comunica con A tramite un rubinetto C.
Supponiamo che il sistema non scambi calore con l'esterno, quindi $Q = 0$. Se apriamo il rubinetto, il gas si espande. Le pareti inoltre non si spostano, per cui il lavoro scambiato con l'esterno è $L = 0$. Si ha allora che $\Delta U = 0$. Misurando la temperatura del gas, essa non cambia, quindi $\Delta T = 0$.

Pressione e volume sono cambiati, ma la temperatura non è cambiata e l'energia interna non è cambiata. L'unico modo di conciliare ciò è riconoscere che l'energia interna è **solo in funzione della temperatura**. Ossia:

$$U = U(T)$$

Tale esperienza, nota come **seconda esperienza di Joule**, indica che l'energia interna dipende solo dalla temperatura.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

12 - Principi della termodinamica

Energia interna di un gas perfetto

Ci chiediamo adesso come calcolare l'energia interna. Abbiamo già visto che l'energia interna è una funzione di stato, ossia dipende dallo stato del gas. Più precisamente, si osserva che:

$$U = U(T)$$

Ossia l'energia interna è solo in funzione della temperatura.

Dal primo principio della termodinamica sappiamo che:

$$Q - L = \Delta U$$

Pertanto:

$$dU = \delta Q - \delta L$$

Sapendo che $dL = PdV$ allora possiamo scrivere che:

$$\delta Q = dU + dL = dU + PdV$$

Se il volume del gas è costante, si ha che $dV = 0$ e si osserva:

$$\delta Q = dU = nC_v dT$$

Quindi la variazione infinitesima di energia interna corrisponde al calore infinitesimo scambiato dal sistema. C_v è il **calore molare a volume costante**. Inoltre, il calore molare per un ampio intervallo di temperature è considerabile come **costante**.

Osserviamo che:

$$Q = \Delta U = \int_{T_0}^{T} nC_v dT = U(T) - U(T_0)$$

Pertanto:

$$U(T) = U(T_0) + \int_{T_0}^{T} nC_v dT = U(T_0) + nC_v \int_{T_0}^{T} dT = U(T_0) + nC_v(T - T_0)$$

Ovvero l'energia interna del gas perfetto alla temperatura T è pari a:

$$U(T) = nC_v T + costante$$

con una costante arbitraria trascurabile.

Calore molare a pressione costante

Il calore scambiato dipende dal tipo di trasformazione che il sistema subisce. A pressione costante o a volume costante i calori assorbiti sono diversi. Calori molari a pressione costante e a volume costante pertanto sono diversi.

Partendo dal primo principio della termodinamica:

$$\delta Q = PdV + dU$$

Si osserva che $PdV \neq 0$ in quanto la trasformazione avviene a pressione costante, non a volume costante.

Poiché $dU = nC_v dT$, si ha che:

$$\delta Q = PdV + nC_v dT = nC_p dT$$

A pressione costante possiamo utilizzare l'equazione di stato:

$$PV = nRT \implies PdV = nRdT$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Pertanto:

$$\delta Q = nRdT + nC_v dT = ndT(R + C_v) = nC_p dT$$

Quindi dividendo ambo i membri per ndT:

$$C_p = C_v + R$$

Il risultato è logico. Infatti se un gas in un recipiente viene riscaldato, se il volume del gas può cambiare non tutto il calore assorbito dal gas viene usato per aumentare la temperatura. In parte esso viene utilizzato per aumentare il volume. Se il sistema si riscalda a pressione costante, l'aumento di temperatura che si ha con l'espansione sarà più piccolo dell'aumento che si avrebbe se il volume fosse costante. Per aumentare della stessa quantità dT la temperatura, è necessario più calore.

Trasformazioni notevoli nei gas perfetti

Trasformazione isocora

Una trasformazione si dice **isocora** quando avviene a volume costante. Il lavoro compiuto dal sistema è pertanto pari a zero, e il calore è dato da:

$$Q = nC_v(T_f - T_i)$$

E si ha:

$$Q = \Delta U$$

Infine il rapporto:

$$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = costante$$

in quanto V è costante.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Trasformazione isobara

Una trasformazione si dice **isobara** quando avviene a pressione costante. Il lavoro compiuto dal sistema è:

$$L = P\Delta V$$

e si ha:

$$Q = nC_p(T_f - T_i) = n(C_v + R)(T_f - T_i)$$

La variazione di energia interna è:

$$\Delta U = nC_v(T_f - T_i)$$

e il rapporto:

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{P} = costante$$

in quanto P è costante.

Trasformazione isoterma

Una trasformazione si dice **isoterma** quando avviene a temperatura costante. Si ha in questo caso:

$$\Delta U = 0$$

In quanto U è in funzione di T. Dal primo principio:

$$Q - L = 0 \implies Q = L$$

Ossia il calore scambiato è uguale al lavoro.

Sappiamo che:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$L = \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

Dall'equazione di stato:

$$PV = nRT \implies P = \frac{nRT}{V}$$

Sostituendo:

$$L = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV = nRT \log(\frac{V_f}{V_i})$$

Il prodotto PV è costante.

Trasformazione adiabatica

Una trasformazione si dice **adiabatica** quando il sistema non scambia calore con l'esterno. In questo caso $Q = 0$, pertanto:

$$-L = \Delta U = nC_v \Delta T = nCv(T_f - T_i) \implies L = -nC_v(T_f - T_i)$$

Inoltre valgono:

$$PV^\gamma = \text{costante}$$

O in alternativa, sapendo che $P = \frac{nRT}{V}$ dall'equazione di stato:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante}$$

dove γ è il rapporto:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Il sistema compie lavoro a scapito della propria energia interna. Da sottolineare, inoltre, che la relazione PV^γ vale **solamente quando la trasformazione è reversibile**. Infatti tale relazione **non deriva esclusivamente dall'equazione di stato**, ma anche dal fatto che $Q = 0$.

Nel piano $V - P$ una trasformazione adiabatica ha una pendenza più accentuata di una isoterma.

Secondo principio della termodinamica

Dal primo principio abbiamo visto che:

$$Q - L = \Delta U$$

e se $\Delta U = 0$, allora il lavoro può essere convertito in calore. In natura tuttavia la simmetria tra lavoro e calore non è **mai** osservata.

Introduciamo il secondo principio della termodinamica, che presenta diversi enunciati tutti equivalenti (si può dimostrare l'equivalenza degli enunciati).

Enunciato di Clausius

L'enunciato di Clausius afferma che non è possibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un sistema a temperatura inferiore a uno con temperatura superiore.

Enunciato di Kelvin-Planck

L'enunciato di Kelvin-Planck afferma che non è possibile realizzare un sistema termodinamico che prenda calore da una sorgente termica e trasformi integralmente tale calore in lavoro.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Ciclo di Carnot

Esiste un terzo enunciato, che richiede però l'introduzione del **ciclo di Carnot**. Tale ciclo è teorico ed è realizzato dalla macchina teorica nota come **macchina di Carnot**. Tale macchina è costituita da due sorgenti di calore a temperature differenti, e viene schematizzata come un cilindro chiuso con un pistone, con le pareti isolate come un sistema adiabatico e contenente del gas che scambia calore solo attraverso il fondo del cilindro.

Il ciclo di Carnot è un ciclo di un gas perfetto che riceve due trasformazioni adiabatiche e due trasformazioni isoterme. Le trasformazioni isoterme sono ottenute ponendo a contatto il fondo del cilindro con le sorgenti C e F.

1. In primis il gas preleva una quantità di calore Q_C dalla sorgente calda a temperatura T_C durante un'**espansione isoterma**. Tale trasformazione comporta un aumento di volume e una diminuzione di pressione. L'abbassamento di temperatura è annullato dall'effetto del prelievo di calore.
2. Successivamente durante una successiva **espansione adiabatica** il gas finisce di prelevare energia termica e viene mantenuto in modo tale che non scambi energia con l'esterno. Il gas continua, quindi, ad espandersi, aumentando il proprio volume ma diminuendo temperatura e pressione.
3. In una fase di **compressione isoterma** il gas viene compresso mantenendo costante la temperatura. Il calore generato dal lavoro Q_F viene ceduto tramite un contatto con una sorgente a temperatura più bassa T_F. Il volume diminuisce e la pressione aumenta.
4. Dopo che il gas finisce di cedere calore, tramite una **compressione adiabatica** esso viene compresso, facendo sì che non venga ceduto calore con l'esterno. Aumenta la pressione e diminuisce il volume.

Tramite tale ciclo si dimostra che con una macchina ideale è possibile ottenere lavoro riportando il sistema nelle condizioni iniziali. Introduciamo allora il concetto di **rendimento**.

Per una qualunque macchina ciclica con due sorgenti termiche C e F vale:

$$\Delta U = 0 \implies L = Q = |Q_C| - |Q_F|$$

Dove Q_C è il calore assorbito e Q_F quello ceduto. Il **rendimento** η della macchina è definito come la quantità:

$$\eta = \frac{L}{|Q_C|} = \frac{|Q_C| - |Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Q_C è il calore assorbito dalla macchina, mentre L è il lavoro compiuto. Inoltre, si può dimostrare che per il ciclo di Carnot il rendimento vale:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Il **teorema di Carnot** in termodinamica pone un limite superiore per il rendimento. Per una qualunque macchina termica che lavori con due sorgenti, rispettivamente a temperature T_C, T_F, si ha:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} \leq 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

L'uguaglianza vale se la macchina reale ha **solo trasformazioni reversibili**.

Il teorema di Carnot inoltre implica una disuguaglianza fondamentale:

$$\frac{|Q_C|}{T_C} - \frac{|Q_F|}{T_F} \leq 0 \iff \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

In maniera alternativa:

$$\sum_{i=C,F} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Tale disuguaglianza prende il nome di **disuguaglianza di Clausius**.

Da notare come il ciclo generico può essere diviso in tanti cicli infinitesimali. In ogni ciclo si ha un calore scambiato δQ. Allora la disuguaglianza può essere scritta come l'**integrale circolare**:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

E nel caso di cicli reversibili l'integrale è pari a zero.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Entropia

Data una trasformazione da A a B, abbiamo visto che l'integrale circolare è uguale a zero. Definiamo l'**entropia** S come una **funzione di stato**, cioè che dipende solo dallo stato del sistema termodinamico. L'entropia è definita a meno di una costante additiva, ed è tale che:

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T} = S(B) - S(A)$$

L'entropia permette una diversa formulazione del secondo principio della termodinamica. Supponiamo di passare dallo stato A allo stato B tramite una trasformazione irreversibile, e di passare dallo stato B allo stato A tramite una trasformazione reversibile. Si ha:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_I \frac{\delta Q_{irr}}{T} + \int_{II} \frac{\delta Q_{rev}}{T} \leq 0$$

Poiché la trasformazione II è reversibile, allora possiamo dire:

$$\int_{II} \frac{\delta Q_{rev}}{T} = -\int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T} = -\Delta S$$

Si osserva allora che:

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{irr}}{T} \leq \Delta S$$

Supponiamo adesso che un sistema abbia trasformazioni irreversibili ma adiabatiche. Se la trasformazione è adiabatica, non si scambia calore con l'esterno, per cui $\delta Q = 0$. Ma allora si ha che $\Delta S \geq 0$ per trasformazioni adiabatiche. L'uguaglianza vale se il sistema ha solo trasformazioni reversibili. Per definizione un sistema isolato non scambia calore con l'esterno. Si ha allora che per un sistema isolato, $\Delta S \geq 0$. Ovvero, l'**entropia di un sistema isolato può solamente crescere, e rimane uguale se avvengono solo trasformazioni adiabatiche reversibili**. Questa è una formulazione alternativa del secondo principio della termodinamica: l'entropia cresce con trasformazioni irreversibili.
Un'immediata applicazione è il sistema dell'universo, che è chiaramente un sistema isolato. Si ha allora che $\Delta S \geq 0$: l'entropia dell'universo cresce costantemente. Questo è uno dei motivi per cui il tempo va solo in avanti e mai indietro.

Se dQ è un differenziale esatto, allora si può calcolare ΔS come segue:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{mcdT}{T} = mc \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_B}{T_A}$$

L'entropia si misura in $\frac{J}{K}$. Da notare inoltre che il procedimento mostrato ci permetet di calcolare la variazione di entropia **anche avendo trasformazioni irreversibili**: basta trovare un insieme di trasformazioni reversibili e calcolare la variazione di entropia lungo questo processo.

Principi della termodinamica applicati all'universo

Applicati all'universo, i due principi della dinamica assumono la seguente forma:

1. l'energia totale dell'universo è costante;
2. l'entropia totale dell'universo cresce a causa delle trasformazioni irreversibili.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

13 - Entropia

Variazione di entropia

La variazione di entropia di un sistema è definita come:

$$\Delta S = S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T}$$

Per il primo principio della termodinamica, possiamo scrivere:

$$dQ = dU + dL_{rev}$$

Per un gas perfetto, inoltre, vale che:

$$L_{rev} = PdV$$

Sostituendo quanto visto nell'equazione della variazione di entropia:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dU + PdV}{T} = \int_A^B \frac{nC_v dT + PdV}{T} =$$

$$= \int_A^B \frac{nC_v dT}{T} + \int_A^B \frac{PdV}{T} = nC_v \int_A^B \frac{dT}{T} + \int_A^B \frac{PdV}{T} = nC_v \ln \frac{T_B}{T_A} + \int_A^B \frac{PdV}{T}$$

Il secondo integrale richiede la conoscenza del cambiamento della pressione e del volume. Tuttavia dall'equazione dei gas perfetti deduciamo:

$$P = \frac{nRT}{V} \implies \frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$$

Pertanto:

$$\int_A^B \frac{PdV}{T} = \int_A^B \frac{nRdV}{V} = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Quindi:

$$\Delta S = nC_v \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

L'entropia di un gas può aumentare mantenendo una delle due variabili di stato costanti, ad esempio la temperatura costante e aumentando il volume o aumentando la temperatura ma mantenendo costante il volume.

Esempio: scambio termico tra due solidi

Abbiamo due corpi solidi a temperature T_1, T_2, con $T_1 > T_2$. Sappiamo che il sistema, se isolato dall'esterno, raggiunge una temperatura di equilibrio:

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

Sappiamo che:

$$dQ = mcdT$$

e che:

$$L = 0$$

in quanto supponiamo che non ci sono espansioni di volume. La variazione di entropia:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_A^B \frac{mcdT}{T} = mc \ln \frac{T_B}{T_A}$$

L'entropia del corpo che cede calore diminuisce, ma in realtà possiamo dimostrare che l'entropia totale del sistema aumenta, come prevede il secondo principio della termodinamica. Lo dimostriamo

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

nel caso in cui $m_1 = m_2 = m$ e $c_1 = c_2 = m$. In tal caso la temperatura di equilibrio è semplicemente la media:

$$T_{eq} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

La variazione di entropia:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Il sistema 1 si trasforma cambiando la temperatura da T_1 a T_{eq}; il discorso è analogo per il sistema 2. Otteniamo allora che la variazione di entropia totale è:

$$\Delta S_{tot} = mc \ln \frac{T_{eq}}{T_1} + mc \ln \frac{T_{eq}}{T_2} = mc(\ln \frac{T_{eq}^2}{T_1 T_2})$$

Si dimostra che ΔS_{tot} è positivo semplicemente osservando che:

$$T_{eq}^2 = \frac{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2}{4}$$

Se la variazione di entropia totale dev'essere positiva, allora l'argomento del logaritmo dev'essere maggiore di 1:

$$T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 > 4T_1T_2 \iff (T_1 - T_2)^2 > 0$$

Chiaramente questa proposizione è vera (ricordiamo l'ipotesi $T_1 > T_2$).

Entropia e "disordine"

Solitamente si dice che l'entropia è associata al disordine di un sistema, affermando che le trasformazioni spontanee comportano un aumento del disordine dell'universo. In realtà non vi è alcun modo di associare una grandezza fisica al grado di disordine di un sistema. Non essendo possibile misurare quantitativamente il disordine di un sistema, l'**entropia non è collegata al disordine**.

Un collegamento più corretto per l'entropia è con la **probabilità termodinamica** W, grandezza fisica che conta quanti microstati corrispondono ad un certo stato macroscopico.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Supponiamo di avere due dadi e consideriamo come macrostato "somma pari a 2". Si ottiene il due avendo le facce dei due dadi pari ad 1. Se come macrostato invece consideriamo "somma pari a 7", possiamo considerare le diverse combinazioni: $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$. Ogni combinazione è un **microstato**, mentre la somma è un **macrostato**.
Nel caso in cui il macrostato è 2, sappiamo il microstato, ma nel caso 7 non sappiamo in quale microstato siamo. Questo quindi comporta che **maggiore è il macrostato**, maggiore è il grado di incertezza che si ha sulla conoscenza dei microstati.

L'**equazione di Boltzmann** esprime l'entropia in virtù della probabilità termodinamica:

$$S = k_B \cdot \ln W$$

Maggiore è la probabilità termodinamica, maggiore è l'entropia del sistema. Quindi se l'entropia è più grande, allora è maggiore il numero di modi (ossia i microstati) in cui si può ottenere lo stato macroscopico del sistema (ossia il macrostato). La seconda legge della termodinamica allora può essere espressa con la seguente formulazione: le trasformazioni spontanee comportano un aumento della probabilità termodinamica.

Trasformazioni spontanee e irreversibilità

Consideriamo un recipiente diviso in due settori e consideriamo un setto inizialmente chiuso. Per semplicità, consideriamo un gas costituito da due molecole nello scompartimento sinistro del recipiente. Aperto il setto, abbiamo tre configurazioni:

- 2 molecole a sinistra;
- 2 molecole a destra;
- 1 molecola per scompartimento.

Dal punto di vista naturale, le tre configurazioni sono possibili. **Ma la probabilità termodinamica è diversa**: W è maggiore per la configurazione in cui le molecole sono equamente distribuite tra i due scompartimenti. La configurazione simmetrica diventa altamento più probabile al crescere del numero di molecole.

L'irreversibilità delle trasformazioni corrisponde quindi ad una maggiore probabilità termodinamica. Ossia, **le trasformazioni irreversibili che coinvolgono un gran numero di molecole avvengono in quanto più probabili**.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Entropia come mancanza di informazione

La formulazione di entropia nota nel campo dell'informazione è **l'entropia di Shannon**:

$$S = -\alpha k_B \sum_i p_i \log_2 p_i$$

Tale misurazione quantifica la mancanza di informazione, per cui se l'entropia cresce, perdiamo informazioni sul modo in cui il macrostato è realizzato in termini dei suoi microstati. Se S cresce, perdiamo quindi informazione su come sia fatto il sistema a livello microscopico: perdiamo informazioni sul sistema.

A livello concettuale l'entropia di Shannon è un modo diverso di interpretare l'entropia termodinamica. Quindi l'entropia può essere interpretata come la probabilità di osservare un macrostato, o come ignoranza nell'oservare un microstato.

Terzo principio della termodinamica

Sperimentalmente si osserva che in processi isotermi:

$$\lim_{T \to 0} \Delta S = 0$$

Tale principio può essere enunciato in maniera equivalente asserendo l'**irraggiungibilità dello zero assoluto**. Ciò è dovuto a limiti delle leggi della natura.

Lo zero assoluto è stato introdotto osservando che la pressione di un gas perfetto diventa zero quando la temperatura è pari a $0°K$. Il terzo principio afferma che questa temperatura è solamente un punto asintotico. Si osserva infatti che:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \iff Q = \Delta S \cdot T$$

Q decresce più rapidamente di T, in quanto al tendere di T a 0 anche ΔS tende a 0. Abbassando T, diventa impossibile lo scambio di calore con l'esterno.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

14 - Onde

Si definisce **onda** la modalità di trasmettere energia senza che ci sia trasferimento di materia. Ad esempio, le perturbazioni nell'acqua si propagano tramite onda. Le molecole di acqua oscillano intorno alle proprie posizioni di equilibrio, per cui alla propagazione del massimo non corrisponde un trasferimento di materia.

Onde trasversali e longitudinali

Distinguiamo due tipi di onde:

- le onde **trasversali** sono onde in cui le vibrazioni delle particelle intorno alle posizioni di equilibrio sono perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda. Di questo tipo sono le onde sismiche S, le onde su corda tesa e le elettromagnetiche;
- le onde **longitudinali** sono onde in cui le vibrazioni delle particelle intorno alle posizioni di equilibrio sono parallele alla direzione di propagazione dell'onda. Di questo tipo sono le onde sismiche P e le onde acustiche.

Onde sinusoidali

Il tipo più semplice di onde che si possono studiare sono le **onde sinusoidali**, di legge:

$$\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) = A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T})$$

dove k è il numero d'onda, ossia:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

mentre ω è la frequenza:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Aggiungendo a x la lunghezza d'onda, ossia $\xi(x,t) = \xi(x+\lambda,t)$, ossia la lunghezza d'onda ci dice con che periodicità nello spazio si ripete l'onda. Analogamente, T ci dice su che scala temporale l'onda si ripete.

L'onda non dipende da x e t separatamente, ma da una combinazione opportuna di x e t. Questo sarà importante nelle successive osservazioni.

Avendo definito il periodo come il periodo temporale dell'onda e la lunghezza d'onda come il periodo spaziale dell'onda, si indica con c la velocità di propagazione dell'onda:

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

Maggiore è λ, maggiore è la velocità con cui si propaga.

Suono

Il suono è un'onda di pressione generata dall'oscillazione delle particelle del mezzo attorno alle posizioni d'equilibrio. L'onda è la continua compressione e rarefazione dell'aria nella quale si propaga il suono.

Equazione delle onde

Le onde si propagano nello spazio secondo la legge:

$$c^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = 0$$

Per le onde di pressione, ossia le onde che si propagano nei gas tramite compressione o decompressione locale, si può dimostrare che:

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

dove ρ è la **densità** del mezzo di propagazione:

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Per il gas perfetto:

$$c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$$

Data l'equazione delle onde, la soluzione più generale è la funzione arbitraria:

$$\xi = \xi(x - ct)$$

Si può dimostrare ciò utilizzando la regola della derivazione a catena. Indicando infatti u come $x - ct$, si può dire che ξ è una funzione dipendente da u. Nell'equazione:

$$c^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = 0$$

Si osserva che:

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} = \frac{\delta \xi}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta \xi}{\delta u}$$

Analogamente:

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \frac{\delta \xi}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta t} = -c \frac{\delta \xi}{\delta u}$$

Ricalcolando per il secondo grado, si ottiene:

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 \xi}{\delta u^2} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta^2 \xi}{\delta u^2}$$

Analogamente:

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 \xi}{\delta u^2} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = c^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2}$$

che il risultato è pari a zero. Qualunque sia la forma funzionale di ξ, ossia qualunque funzione ξ che dipende da $x - ct$, indica un'onda che si propaga da sinistra verso destra.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Esiste anche un'altra soluzione che rappresenta l'onda che si propaga da destra verso sinistra: basta porre $x + ct$.

Da notare che il risultato ottenuto ci permette di poter ottenere un'onda senza che il profilo di questa si deformi. Esistono tuttavia onde anomale, come lo tsunami. Lo tsunami si produce nell'oceano a causa di un terremoto dovuto ad uno spostamento del fondale. La perturbazione generata dallo spostamento del fondale crea un picco che si propaga tramite lo tsunami.

Intensità

L'intensità è l'energia trasportata da un'onda per unità di superficie e per unità di tempo. Si osserva che:

$$I \propto c\omega^2\xi_0^2$$

Maggiore è l'ampiezza dell'onda, maggiore è l'energia trasportata. Analogamente, maggiore è la pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$, maggiore è l'energia trasportata.

Nel caso in cui trasportiamo onde sonore, più è forte un suono o più acuto esso è, più questo trasporta energia. Analogamente, se trattiamo onde elettromagnetiche maggiore è l'intensità dell'onda maggiore è il campo elettrico e magnetico; inoltre, la frequenza dell'onda elettromagnetica indica una maggiore intensità dell'onda. Questo è il motivo per cui i raggi X e γ sono pericolosi: trasportano una grande quantità di energia che può distruggere le molecole.

Interferenza e sovrapposizione

Se due punti materiali si urtano, abbiamo visto che essi non perdano la propria identità. Quando abbiamo due onde che collidono, ci sono fenomeni che sono propri della propagazione. Uno tra questi è l'**interferenza**.

Supponiamo di avere due onde che si propagano lungo la stessa direzione ma verso opposto: la perturbazione totale è zero. Le due onde si cancellano l'una con l'altra (cosa che non avviene coi punti materiali). Questo fenomeno prende il nome di **interferenza**: le onde possono sommarsi in ampiezza, ma anche sottrarsi. Questo è facile da capire: è possibile che un'onda faccia oscillare il mezzo verso l'alto e l'altra verso il basso.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Una conseguenza dell'interferenza è la formazione di una configurazione in cui ci sono punti con assenza di perturbazione. Questi punti sono detti **nodi**: l'interferenza tra le onde è **totalmente distruttiva**. Ci sono altri punti in cui è presente l'oscillazione. Notiamo anche che la posizione in cui si sviluppano massimi e minimi è la stessa: tali punti sono detti **anodi**. Questo tipo di onda prende il nome di **onda stazionaria** e si verifica quando due onde con stessa ampiezza, stessa lunghezza d'onda e stesso periodo viaggiano lungo la stessa direzione ma con verso opposto e si **sovrappongono**. La sovrapposizione delle due onde è un'onda stazionaria e dipende **separatamente** da x e da t:

$$\xi(t,x) = 2\xi_0 \sin(\frac{2\pi x}{\lambda}) \cos(\frac{2\pi t}{T})$$

Ad esempio, le corde di una chitarra, quando pizzicate, vibrano generando onde stazionarie. Inoltre, solo le armoniche possono esistere: tutte le altre onde si annullano per interferenza distruttiva. Le armoniche hanno pulsazione pari a multipli della pulsazione ω_0 del modo fondamentale.

Diffrazione

Consideriamo un fucile di precisione e spariamo un proiettile in una fessura molto piccola: con sufficiente precisione, possiamo attraversare la fessura. Se tuttavia lo facciamo con un'onda, non abbiamo la propagazione come quella del proiettile, ma si formano tanti fronti d'onda concentrici. Questo fenomeno prende il nome di **diffrazione** e avviene ogniqualvolta un'onda incontra un ostacolo (fessura, pilastro, ecc.). Dal punto di vista puramente pratico, l'effetto diventa rilevante quando la fessura ha dimensione nell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

15 - Cenni di meccanica quantistica

Abbiamo visto che l'onda è un qualunque modo di trasmettere energia senza la presenza di trasferimento di materia. Per le onde sinusoidali abbiamo definito λ come la lunghezza d'onda e T come il periodo. Abbiamo anche visto che date due onde, queste sono soggette a fenomeno di interferenza: se due onde oscillano in fase l'interferenza è costruttiva (i massimi si sommano), mentre se sono in opposizione di fase l'interferenza è distruttiva. Abbiamo anche parlato di onde stazionarie, che si formano quando un'onda sinusoidale interferisce con un'altra onda di stessi λ e T ma che viaggia con verso opposto sulla stessa direzione. In un'onda stazionaria, la posizione del massimo o del minimo non cambia nel tempo e non si ha una trasmissione di energia, bensì una concentrazione di energia. Abbiamo infine visto tramite la diffrazione come la formazione di tante onde concentriche avvenga quando un'onda incontra una fessura con dimensione nell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda.

Modello del corpo nero

Si definisce **corpo nero** un corpo che assorbe completamente la radiazione elettromagnetica di qualsiasi lunghezza d'onda e incidente su di esso a qualsiasi angolo. Il più semplice esempio di corpo nero è un foro su una superficie sferica vuota. Quando la radiazione elettromagnetica incide sul foro, nel momento in cui essa viene assorbita essa comincia a rimbalzare e rimane intrappolata. Accadono quindi due cose:

1. essendo intrappolata, non esce più. **La radiazione non viene più riflessa** e il corpo **assorbe tutta la radiazione**;
2. la radiazione dopo un certo tempo raggiunge l'equilibrio termico con le pareti della cavità. Ossia, la radiazione raggiunge la temperatura del corpo nero.

Ogni tanto il corpo nero emette radiazioni elettromagnetiche che sono dovute alla sua temperatura. Si definisce allora la funzione:

$$\epsilon(\nu) = \frac{dE}{dtdAd\nu}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Essa è l'energia emessa tramite radiazione elettromagnetica dal corpo nero per unità di tempo, area e di lunghezza d'onda. Si può calcolare letteralmente quante onde si formano nella cavità (si dice **contare i modi**). Si ottiene che tale numero è pari a:

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Successivamente si calcola l'energia media, tramite le formule della fisica classica:

$$\langle E\rangle = 2\cdot\frac{1}{2}k_BT$$

E si osserva:

$$\epsilon(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BTd\nu$$

Osservando le curve teoriche e i dati sperimentali, si osserva una concordanza quando le frequenze sono basse, ossia quando l'energia emessa è piccola. Quando diminuiscono le lunghezze d'onda, c'è un disaccordo notevole con i risultati sperimentali: tale risultato prende il nome di **catastrofe ultravioletta**. Questo perché tale risultato si manifesta con frequenze molto alte.

Il problema viene risolto notando che il conteggio delle onde è geometrico e non ha nulla a che vedere con la fisica classica. Quindi il problema non risiede nel numero di onde che si formano nella cavità, ma dev'essere nel modo in cui è calcolata l'energia media associata alle onde. Planck risolve il problema assumendo che l'energia non è continua ma quantizzata, ossia assume valori **multipli di** ν, ossia la frequenza dell'onda. Come conseguenza si ha:

$$\langle E\rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}$$

h è una costante nota come costante di Planck ed è uguale a $6.6\cdot10^{-34}Js$. $\hbar$ è pari a $\frac{h}{2\pi} = 1.054\cdot10^{-34}$. Il potere emissivo del corpo nero, inoltre, dipende dalla temperatura di questo.

Sebbene l'ipotesi di Planck sia difficile da comprendere, è l'unica che riesce a spiegare in maniera naturale i dati dell'esperimento. Un'applicazione dell'ipotesi di Planck è il calcolo della massima lunghezza d'onda della radiazione termica (legge di Wien):

$$\lambda_{max} = \frac{\alpha}{T}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

con $\alpha = 2.9 \cdot 10^{-3} mK$.

Modello atomico di Rutherford

Una particella α è una particella carica positiva. Bombardando con particelle α una lamina d'oro, secondo il modello di Thomson, ossia il modello **a panettone** (una massa positiva in cui sono immersi elettroni negativi), le particelle dovrebbero attraversare la lamina d'oro: il concetto di impenetrabilità, infatti, non vale su scala atomica e il campo elettrico degli atomi non poteva influenzare il moto. Tuttavia ci si è resi conto che alcune particelle venivano riflesse. L'atomo allora è costituito da un nucleo centrale molto piccolo, denso e positivo e da una nuvola di cariche negative intorno. Le dimensioni delle orbite elettroniche sono molto più grandi di quelle del nucleo.

Il modello tuttavia dovrebbe prevedere un atomo instabile. Il motivo è dovuto al fatto che gli elettroni dovrebbero collassare sul nucleo in quanto si muovono costantemente intorno al nucleo emettendo radiazioni. Se l'elettrone emette radiazioni, perde energia, restringendo la sua orbita e aumentando nuovamente la sua velocità. Questo è un circolo vizioso che porta al collasso verso il nucleo.

Il **modello atomico di Bohr** ipotizza similmente a Planck che gli elettroni dell'atomo di idrogeno non possono assumere valori di energia qualsiasi, ma solo quantizzati. In particolare, assumendo questo, è impossibile che ci sia il collasso dell'atomo, perché esiste uno stato occupabile dall'elettrone al di sotto del quale non vi è nulla: per collassare si dovrebbero occupare stati dell'energia che non esistono. Tale stato dell'elettrone prende il nome di **stato fondamentale**. L'idea di base è la seguente: quando un elettrone risiede su un'orbita permessa, **non irradia energia**. Questo modello permette anche di comprendere come un atomo assorbe o cede energia:

- l'atomo assorbe energia e l'elettrone fa un salto da un livello ad uno più alto;
- se l'atomo è eccitato può cedere energia e l'elettrone fa un salto ad un livello più basso.

Tali processi vivono solo nella fisica quantistica e non nel modello classico della fisica.

La domanda più naturale è la seguente: come si possono conciliare i risultati della fisica classica con questo nuovo tipo di leggi della natura, lontani dall'apparenza? Una delle proposte è stata fatta da de Broglie, che afferma che **ad ogni corpo materiale è associato un'onda, detta onda di materia**, la cui lunghezza d'onda è:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Maggiore è la velocità o la massa, più piccola è la lunghezza d'onda. Il motivo per cui gli effetti non vengono osservati risiede proprio in questo. Un pallone da calcio infatti ha una lunghezza d'onda dell'ordine $O(10^{-35})$: ogni effetto ondulatorio è trascurabile e il corpo macroscopico segue le leggi della fisica classica. Ma per l'elettrone dell'idrogeno è $O(10^{-10})$, stesso ordine della dimensione dell'atomo di idrogeno: la lunghezza d'onda corrisponde con la dimensione dell'atomo stesso, per cui gli effetti quantistici diventano rilevanti.

L'ipotesi spiega in modo quasi geometrico il modello atomico di Bohr (id est la stabilità dell'atomo). Infatti se è vero che l'elettrone dell'atomo di idrogeno si comporta come un'onda (di cui non sappiamo il tipo), se l'onda ai due estremi non è chiusa perfettamente l'atomo collassa per l'interferenza. Se invece è chiusa perfettamente, si crea un'onda stazionaria, che sappiamo essere stabile. La stabilità dell'atomo equivale ad assumere che l'onda di materia sia l'onda stazionaria. L'energia dei livelli elettronici dell'atomo di idrogeno è calcolabile dalla formula:

$$E = -\frac{E_H}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

con n naturale.

Natura ondulatoria

Esiste un modo per verificare sperimentalmente quanto visto? La risposta è positiva. Infatti un esperimento noto è l'esperimento a due fenditure. Abbiamo una pistola con cui spariamo un proiettile, e assumiamo che la direzione cambi in maniera random proiettile per proiettile. I proiettili sono sparati verso un pannello a due fenditure, dietro il quale vi è uno schermo su cui colpisce il proiettile. Se noi facciamo questo esperimento tenendo presente solo la fessura di sopra, osserviamo una distribuzione dei proiettili con un picco sulla fessura e con delle code: la pistola infatti spara i proiettili in direzione random. Se noi chiudessimo una fessura, avremo una distribuzione piccata sull'altra fessura. Se entrambe le fessure sono aperte, la distribuzione è piccata al centro e con delle code che si abbassano allontanandosi dalla fessura. Questo è il comportamento atteso dalla meccanica classica.

Ripetiamo l'esperimento con onde elettromagnetiche. Possiamo lasciare aperta una sola delle due fessure: la distribuzione è piccata intorno alla fessura, come per il proiettile. Se però entrambe le fenditure sono aperte, non abbiamo una distribuzione simile a quella del proiettile, ma con dei picchi. Questo pattern prende il nome di **frange di interferenza**: le zone in cui non ci sono picchi sono zone di interferenza distruttiva, mentre le altre sono di interferenza costruttiva.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Questo pattern è comunque comprensibile dalla fisica classica. Facciamo l'esperimento allora con degli elettroni. Il cannone elettronico spara elettroni in direzione random. Se lasciamo aperto una sola fenditura, abbiamo un pattern come quelli visti in precedenza. Se lasciamo aperte entrambe le fenditure, il comportamento è **tipico delle onde**: frange d'interferenza. Questo è un effetto quantistico: le particelle si comportano come onde. Si osserva allora che gli elettroni formano un pattern di interferenza. Il comportamento di particelle microscopiche è un comportamento ondulatorio.

Quanto visto suggerisce che si possa parlare di una **dualità onda-particella**, anche se effettivamente ha solo un significato storico in quanto siamo abituati a parlare di onde e particelle nel mondo macroscopico. Sarebbe opportuno affermare che le particelle elementari si comportano come quantoni descritti da funzioni d'onda che evolvono in accordo alle leggi della meccanica quantistica. Infatti quando scriviamo la funzione d'onda di un sistema quantistico si fa un'ipotesi sulla natura corpuscolare e/o ondulatoria del sistema stesso. Ci limitiamo allora a definire una funzione che ci fornisce la **probabilità** che il sistema si trovi in una certa posizione ad un certo tempo:

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$$

Pertanto, $\psi(x,t)$ è una funzione d'onda che rappresenta lo **stato quantistico di una particella**.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

16 - Meccanica ondulatoria di Schrodinger

Abbiamo visto come le particelle microscopiche esibiscono un comportamento di tipo ondulatorio. Ciò viene formalizzato da **Schrodinger** nei suoi articoli.

Le informazioni sullo stato del sistema sono contenute nella funzione d'onda, la cui dinamica è governata da un'equazione differenziale. La si può immaginare come l'equivalente della legge $F = ma$, che permette di ricavare la traiettoria di una particella classica nota la forza applicata ad essa.

Un esempio è la **particella libera**, che in meccanica classica corrisponde al punto materiale non soggetto a forze. In meccanica quantistica, tale particella libera ha la funzione d'onda che è combinazione lineare di funzioni trigonometriche:

$$\psi(x,t) = \sum A_i \cos(k_i x + \omega_i t)$$

Per gli stati non possiamo dire con certezza che la particella occupa una certa posizione. Ciò è evidente nella funzione $P(x,t)$, che è simile ad una gaussiana. Ha un picco in x_0 (probabilità massima di trovare, al tempo t, la particella in x_0). Questo dimostra che per gli stati quantistici non si può definire una posizione ad un tempo fissato. Infatti ciò che in meccanica classica è un punto materiale, in meccanica quantistica diventa un globo, ossia qualcosa di denso alla posizione classica ma che ha una "nube" intorno a x_0. Si perde il concetto di particella puntiforme e prende piede il concetto di stato delocalizzato.

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Quanto visto permette di comprendere a fondo le relazioni di indeterminazione di Heisenberg. Queste relazioni vengono interpretate come relazioni che dimostrano l'impossibilità sperimentale della determinazione di una particella.
Supponiamo di conoscere la posizione di una particella. Dobbiamo illuminare per vederla: dando energia, tuttavia, perdiamo informazioni sulla particella. Non possiamo pertanto stabilire la posizione occupata. Tale impossibilità è legata al fatto che dobbiamo fare misure (ossia è sperimentale). La

legge di indeterminazione è interpretata tuttavia come la impossibilità intrinseca di poter assegnare posizione e velocità:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Se conosciamo con una precisione Δp la velocità della particella, l'incertezza della posizione Δx sarà maggiore di $\hbar$ su p. Più piccola è Δp, maggiore è l'incertezza sulla posizione. Quindi perde senso il concetto di traiettoria della particella. La impossibilità di definire la traiettoria non è empirica, ma impossibilità intrinseca: lo stato quantistico non ha posizione e velocità ben definite.

Osserviamo tuttavia che per corpi macroscopici l'incertezza della posizione è molto piccola, mentre per particelle come elettroni l'incertezza può essere anche più grande del corpo stesso. Quindi nel mondo microscopico non si può localizzare l'elettrone.

Un esempio più concreto riguarda sempre il punto materiale della meccanica classica che ha velocità definita $\vec{v}$. In meccanica classica, possiamo scrivere la legge oraria per questa particella, localizzando tempo per tempo la posizione della particella. In meccanica quantistica la situazione cambia. L'informazione da prendere come principio riguarda la scrittura della funzione d'onda della particella libera:

$$\psi(x) = Ce^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Si ha che:

$$|\psi(x)|^2 = |C|^2$$

dove C è una costante. La probabilità di trovare la particella in x è indipendente da x ed è costante: la particella è delocalizzata in tutto l'universo. Avendo stimato la precisione, abbiamo perso informazione sulla posizione della particella. Infatti si può dire che la particella ha quella velocità, ma non sappiamo dove si trova nell'universo. Questo esempio è estremo ma fa capire:

1. come funzionano le relazioni di Heisenberg;
2. come risulti impossibile localizzare un corpo;
3. come ciò non sia legato alle misurazioni di velocità e posizione.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

Sovrapposizione di stati

Ogni onda è soggetta a sovrapposizione e interferenza. Poiché lo stato quantistico è una funzione d'onda, si può costruire uno stato quantistico come:

$$\psi\rangle = c_1\vec{p}_1\rangle + c_2\vec{p}_2\rangle + c_3\vec{p}_3\rangle$$

Possiamo calcolare la probabilità che lo stato abbia impulso $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ e $\vec{p}_3$. Qualunque stato quantistico che è combinazione lineare di stati, la probabilità che si trovi in quello stato è il modulo al quadrato del coefficiente di quello stato, come osservato dal principio di indeterminazione di Heisenberg.

Un'interessante applicazione di ciò è il **qubit**. Un qubit è la combinazione lineare i cui coefficienti sono parametrizzati da due angoli θ e ϕ:

$$\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})0\rangle + e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2})1\rangle$$

In questo caso quando abbiamo $\theta = 0$, la probabilità di misurare 0 è pari ad 1. Con $\theta = \pi$, la probabilità di misurare lo stato zero è 0, quindi il qubit è nello stato 1. Il tipo di stato si rappresenta con la **sfera di Bloch**, la rappresentazione tramite coordinate polari dello stato. Lo stato zero corrisponde al vettore orientato lungo l'asse z positivo. Se aumentiamo θ, spostiamo il vettore lungo la superficie della sfera. Con $\theta = \pi$, lo stato è in 1 e il vettore è orientato in z negativo. L'angolo ϕ introduce uno sfasamento nel piano $x - y$. La sfera di Bloch solitamente è spesso rappresentato come una **mezza sfera**, usando invece di $\frac{\theta}{2}$ θ e si fa variare θ tra 0 e π.

Conclusioni

La meccanica quantistica ci forza a pensare il mondo microscopico in modo molto diverso rispetto alla meccanica classica, abbandonando i concetti tipici che abbiamo visto e abbracciando una visione del mondo nettamente probabilistica, nella quale diciamo che, fissato un tempo t, quello che possiamo dire dello stato è che occupa una certa posizione x con probabilità P. Lo stato non ha posizione o velocità definite, ma solo per motivi fisici: non riguarda il processo di misurazione, ma lo stato intrinseco.

Uno stato quantistico pertanto lo possiamo immaginare come un cilindro. Il cilindro ha una sua forma tridimensionale. Quando parliamo di dualismo onda-particella, quello che facciamo mentalmente è

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it

immaginare tale cilindro illuminato lungo due direzioni: dalla base e dalla superficie laterale. Illuminandolo dalla base otteniamo un cerchio, ma dalla superficie laterale un quadrato (o un rettangolo). Quindi immaginiamo il rettangolo come lo stato “particella”, e il cerchio come lo stato “onda”. Lo stato quantistico quindi è più complicato: è caratterizzato da un **indeterminismo intrinseco**.

Materiale fornito da noistudiamo.it | Contatti: info@noistudiamo.it